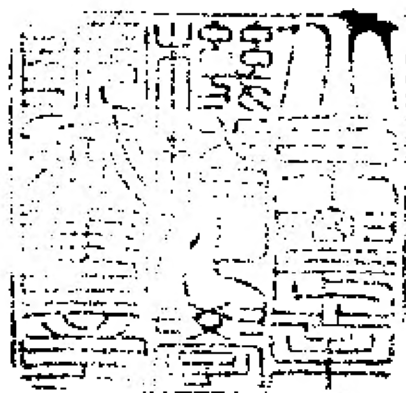
测度论基础

刘 文 著



辽 宁 教 育 出 版 社
一九八五年・沈阳

测度论基础

刘 文 著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　朝阳六六七厂印刷

字数：167,000　开本：850×1168 1/32　印张：7

印数：1—4,000

1985年7月第1版　1985年7月第1次印刷

责任编辑：王常珠　俞晓群　责任校对：王淑芬

封面设计：周咏红

统一书号：7371·2　定价：1.30元

序　　言

测度论是数学的一个重要分支，它在现代数学中有着广泛而深刻的应用。特别是近代概率的数学理论，是建立在测度论基础上的。对于数学专业尤其是概率专业的学生来说，测度论已成为必需的基础知识。

最近几年，作者曾有两次在全国性的讲习班讲授测度论这门课程。一次是1979年全国第一届应用概率讨论会（西安）；另一次是1981年全国工科院校概率论讲习讨论会（天津），本书是在这两次讲习班的讲稿基础上经过较大的修改与补充而成的。本书的取材主要是针对学习概率论的需要，叙述上自成体系，除了要求读者具有较好的分析基础外，并不需要其它的准备。没有学过实变函数论但具有一定抽象能力的读者，也可以直接阅读本书。

作者谨此对王梓坤教授表示衷心的感谢，他的意见对作者有很大的启发和帮助。还要感谢纪延瑞教授对本书写作的关心和支持，以及他们对书稿的审阅和推荐。

限于水平，书中一定还存在缺点和错误，敬请读者批评指正。

刘　文

1984年于天津

目　　录

第一章　集与类

§1·1　集和集的运算

1. 集的概念

集是数学中最基本的概念之一．所谓一个集，就是由一些不论什么样的对象所组成的总体．组成一个集的对象叫做这个集的元素．例如，某个城市的全体居民构成一个集，某图书馆的全部藏书构成一个集，全世界所有的国家构成一个集，等等．数学里也常常碰到各种各样的集，例如，全体自然数的集，直线上所有点的集，等等．

我们用大写字母表示集，用小写字母表示元素．若事物 a 是集 A 的一个元素，则记为

$$a \in A \text{（读作“}a\text{ 属于 }A\text{”）}$$

若 a 不是 A 的元素，则记为

$$a \notin A \text{（读作“}a\text{ 不属于 }A\text{”）}$$

例如，设 N 是全体自然数的集，R 是全体实数的集（除非另有说明，本书中 N 与 R 恒分别表示这两个集），则

$$1 \in N,\quad \frac{1}{2} \notin N$$

$$\sqrt{2} \in R,\quad \sqrt{-1} \notin R$$

由有限个元素所构成的集，称为**有限集**；由无限多个元素所构成的集称为**无限集**．

为了方便起见，我们引进空集的概念．不包含任何元素的

集称为空集，并用符号 ϕ 表示.

例如，设 A 是某个班的全体女生的集，如果这个班没有女生，则 A 就是空集.

如果集 A 与集 B 由相同的元素组成，则称 A 与 B 相等，并记为 $A=B$。

例如，设 A 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集，B 是数 1 与 2 所组成的集，则 $A=B$。

我们常用以下几种方法表示集：

（1）在花括号中写出元素的名称或指明元素的范围.

例如，{正整数}，{大于1的实数}，{天津居民} 分别表示由全体正整数，大于 1 的全体实数和天津的全体居民所构成的集.

（2）列举法：写出集的所有元素，或按一定的规律写出它的部分元素后加上删节号"…"，并用花括号把它们括起来.

例如，$\{1,2,3\}$表示由数 1，2，3 所组成的集，这个集也可用$\{2,1,3\}$，$\{3,1,2\}$等记号表示. 由 1 到 100的所有自然数的集可以表示为$\{1,2,\cdots,100\}$。

所有正偶数的集可以表示为

$$\{2,4,6,\cdots\}$$

（3）描述法：在花括号中先写出元素的符号，然后画一竖线，在竖线后面写明元素所满足的条件（或所具有的性质）.例如，

$$\{x|x\in N,1\leqslant x<4\}=\{1,2,3\}$$

$$\{y|y=n^2+1,n\in N,1\leqslant n\leqslant 3\}=\{2,5,10\}$$

$$\{2n|n\in N\}=\{\text{正偶数}\}$$

$$\{x|x\in R,\ 2\leqslant x\leqslant 4\}=[2,4]$$

$$\{\omega|\omega^2-3\omega+2=0\}=\{1,2\}$$

定义1 如果集合A的每一个元素都是集合B的一个元素，则称A是B的**子集**，并记为

$$A\subset B\text{或}B\supset A$$

（读作"B包含A"或"A被B包含"）。

例如，设Q是全体有理数的集，则

$$N\subset Q,\ Q\subset R$$

或记为

$$N\subset Q\subset R$$

我们规定空集ϕ是任何集的子集，即对任何A，$\phi\subset A$。

由以上的定义知，$A=B$的充要条件是

$$A\subset B\text{ 且 }B\subset A$$

由子集的定义显然有$A\subset A$，即A是它自身的子集。如果$A\subset B$，而B中确有元素b不属于A，则称A是B的**真子集**。

必须将以某个对象A为其仅有的一个元素的集$\{A\}$与A本身区别开来。例如，若$A=\{1,2\}$，则$\{A\}$是仅有一个元素A的集，而A是一个有两个元素1与2的集。仅有一个元素的集合称为**单元集**。

在许多问题中，我们所要考虑的集常常是某个给定集的子集，我们称由问题中涉及的全部元素所组成的集为**抽象空间**（简称空间），并用Ω表示。

2. 集的运算

定义2 设A，B是两个集，由A与B的所有元素合并在一起所构成的集，称为A与B的**和集**，简称为**和**，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{\omega|\omega\in A\text{或}\omega\in B\}$$

由A与B的所有公共元素所构成的集称为A与B的**交集**，简称为**交**，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{\omega|\omega\in A\text{且}\omega\in B\}$$

$A\cap B$也可简记为AB。

如果A与B没有公共元素，即$A\cap B=\phi$，则称A与B互不相交。

例如，设

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{3,4,5\}$$

则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$$

$$A\cap B=\{3,4\}$$

完全类似地可以定义任意个集的和集及交集。设

$$\{A_t\,|\,t\in T\}$$

是任意的一组集，其中t是集的指标，它在某个固定的指标集T中变化，由一切$A_t(t\in T)$的所有元素合并在一起所组成的集称为这组集的和集，记为$\bigcup\limits_{t\in T}A_t$，即

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{\omega\,|\,\omega\text{ 至少属于某一个 }A_t,\ t\in T\}$$

由同时属于每个集$A_t(t\in T)$的所有元素所组成的集称为这组集的交集，记为$\bigcap\limits_{t\in T}A_t$，即

$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{\omega\,|\,\omega\in A_t\text{ 对每个 }t\in T\text{ 同时成立}\}$$

如果 $T=N$，则上述和与交分别称为**可列和**与**可列交**，它们也可记为

$$\bigcup_{n\in N}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad \bigcap_{n\in N}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

例 1 设 $T=[0,+\infty)$，$A_t=[0,t)$，则

$$\bigcup_{t\in T}A_t=[0,+\infty),\quad \bigcap_{t\in T}A_t=\{0\}$$

例 2 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1\right]=(0,1]$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[0,1+\frac{1}{n}\right)=[0,1]$

定义 3 若集A与集B互不相交，则称$A\cup B$为A与B的

直和，并记之为$A+B$。一般地说，如果对任意的$s\in T, t\in T$。且$s\neq t$，都有$A_s\cap A_t=\phi$，则称$\bigcup_{t\in T}A_t$为

$$\{A_t|t\in T\}$$

这一组集的直和，并记之为$\sum_{t\in T}A_t$。

例 3 $[1,3]\cup[2,4]=[1,3)+[3,4]=[1,4]$

例 4 $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+1]=\sum_{n=1}^{\infty}[n,n+1)=[1,+\infty)$。

由定义易知，和与交的运算具有如下性质：

(1) $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$;

(2) $A\subset A\cup B, B\subset A\cup B$;

(3) $A\cup\phi=A, A\cup\Omega=\Omega$;

(4) $A\cap\phi=\phi, A\cap\Omega=A$;

(5) 等幂律：$A\cup A=A, A\cap A=A$;

(6) 交换律：$A\cup B=B\cap A, A\cap B=B\cap A$;

(7) 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$,

$A\cap(A\cup B)=A$;

(8) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

前七个性质是显然的，为了证明和的结合律，只须注意$A\cup(B\cup C)$与$(A\cup B)\cup C$都是由A,B,C的所有元素合并在一起所构成的集；为了证明交的结合律，只须注意$A\cap(B\cap C)$与$(A\cap B)\cap C$都是由同时属于A,B,C的元素所构成的集.

根据结合律，我们可将$(A\cup B)\cup C$及$A\cup(B\cup C)$中的任一个写为$A\cup B\cup C$，并将$(A\cap B)\cap C$及$A\cap(B\cap C)$中的任一个写为$A\cap B\cap C$。这种任意省略括号的做法还可以推广到任意多个集的情形上去，并且，根据交换律，还可以交换式中各项的次序。例如

$$
\begin{aligned}
B\cap D\cap A\cap C &= (B\cap D\cap A)\cap C \\
&= (A\cap B\cap D)\cap C \\
&= (A\cap B)\cap (D\cap C) \\
&= (A\cap B)\cap (C\cap D) \\
&= A\cap B\cap C\cap D
\end{aligned}
$$

从交的意义上看，上式也是很明显的，因为无论是 $B\cap D\cap A\cap C$ 或$A\cap B\cap C\cap D$都是由 A,B,C,D 的共同元素所构成的集。

定理 1 下面三个关系

（1） $A\subset B$；

（2） $A\cap B=A$；

（3） $A\cup B=B$。

是等价的，这就是说，如果它们中间的任何一个成立，则它们三个都成立。

在以下的证明中，记号“$\Rightarrow$”表示“推出”，如果 p 与 q 是两个命题，则 $p\Rightarrow q$ 表示由 p 可推出 q 。

证 （1）$\Rightarrow$（2）：设$A\subset B$。因为对任何 A，B，都有$A\cap B\subset A$，故要证明（2）只需证明$A\subset A\cap B$。如果 $x\in A$，则$x\subset B$，故 $x\in A\cap B$，从而$A\subset A\cap B$。

（2）$\Rightarrow$（3）：设$A\cap B-A$。因为对任何A,B，有$B\subset A\cup B$，故要证明（3）成立，只需证明$A\cup B\subset B$。如果$x\in A\cup B$，则$x\in A$ 或 $x\in B$，在前一种情况，由（2）有 $x\in A\cap B$，故仍有$x\in B$，于是 $A\cup B\subset B$。

（3）$\Rightarrow$（1）：设 $A\cup B=B$。则由此式及 $A\subset A\cup B$即得$A\subset B$。

定理 2 （第一分配律）设 A,B,C 是三个集，则$A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$。

在以下证明中“$\Longleftrightarrow$”表示“等价”。$p\Longleftrightarrow q$ 则表示命

题 p 与命题 q 等价。

证　$\omega\in A\cap(B\cup C)\Longleftrightarrow\omega\in A$ 且 $\omega\in B\cup C$

$\Longleftrightarrow\omega\in A$，且 $\omega\in B$ 或 $\omega\in C$

$\Longleftrightarrow\omega\in A$ 且 $\omega\in B$，或 $\omega\in A$ 且 $\omega\in C$

$\Longleftrightarrow\omega\in A\cap B$，或 $\omega\in A\cap C$

$\Longleftrightarrow\omega\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\therefore\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

定义 4　设 Ω 是一空间，$A\subset\Omega$，则 Ω 中不属于 A 的所有元素所构成的集称为 A 的补集（简称补），记为 A'，即

$$A'=\{\omega|x\in\Omega\text{ 且 }x\notin A\}$$

补运算显然具有下列性质：

（1）互补性：$A\cup A'=\Omega, A\cap A'=\phi$，$\phi'=\Omega$，$\Omega'=\phi$。

（2）对合律：$(A')'=A$。

（3）$A\subset B$ 的充要条件是 $A'\supset B'$。

定理 3（德·莫根(De Morgan)律）设 A，B 是两个集，则

（1）$(A\cup B)'=A'\cap B'$；

（2）$(A\cap B)'=A'\cup B'$。

证（1）$\omega\in(A\cup B)'\Longleftrightarrow\omega\notin A\cup B$

$\Longleftrightarrow\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B\Longleftrightarrow\omega\in A'$ 且 $\omega\in B'$

$\Longleftrightarrow\omega\in A'\cap B$

$\therefore\quad(A\cup B)'=A'\cap B'$

（2）$\omega\in(A\cap B)'\Longleftrightarrow\omega\notin A\cap B$

$\Longleftrightarrow\omega\notin A$ 或 $\omega\notin B\Longleftrightarrow\omega\in A'$ 或 $\omega\in B'\Longleftrightarrow$

$\omega\in A'\cup B'$

$\therefore\quad(A\cap B)'=A'\cup B'$

定理 4（第二分配律）设 A,B,C 是三个集，则

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

证　把第一分配律的公式中的 A，B，C 分别换为 A'，B'，C'，我们有

$$A' \cap (B' \cup C') = (A' \cap B') \cup (A' \cap C')$$

两边取补

$$[A' \cap (B' \cup C')]' = [(A' \cap B') \cup (A' \cap C')]'$$

利用德·莫根律及对合律得

$$A \cup (B' \cup C')' = (A' \cap B')' \cap (A' \cap C')'$$

再次利用这两个运算律即得

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

以上三个定律可以推广到一般情况。

第一分配律：

$$A \cap \left(\bigcup_{t \in T} B_t\right) = \bigcup_{t \in T} (A \cap B_t) \qquad (1.1)$$

第二分配律：

$$A \cup \left(\bigcap_{t \in T} B_t\right) = \bigcap_{t \in T} (A \cup B_t) \qquad (1.2)$$

德·莫根律：

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)' = \bigcap_{t \in T} A'_t \qquad (1.3)$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)' = \bigcup_{t \in T} A'_t \qquad (1.4)$$

定义 5　设 A，B 是两个集，属于 A 而不属于 B 的所有元素所组成的集称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$。

例如，设　$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,5\}$，则

$$A-B=\{1,3\}, B-A=\{5\}$$

由差的定义显然有

$$A-B=A \cap B'$$

$$\Omega - A = A'$$

注意，在差的定义中并不要求 B 是 A 的子集。如果 $B \subset A$，则称 $A-B$ 为真差。

定理5 设A,B是两个集，则

$$A\cup B=A+(B-A)=A+A'\cap B$$

证 (1) $A\cap(B-A)=A\cap(A'\cap B)$

$$=(A\cap A')\cap B$$

$$=\phi\cap B$$

$$=\phi$$

∴ A与$B-A$互不相交.

(2) $A+(B-A)=A\cup(A'\cap B)$

$$=(A\cup A')\cap(A\cup B)$$

$$=\Omega\cap(A\cup B)$$

$$=A\cup B$$

上述公式可以推广如下：设$\{A_n\}$是一列集，令

$$B_1=A_1,\ B_n=A'_1\cdots A'_{n-1}A_n\ (n\geqslant 2)$$

则

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}B_k \tag{1.5}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}B_n \tag{1.6}$$

定理6 设A,B,C是三个集，则

$$C\cap(A-B)=(C\cap A)-(C\cap B)$$

即交关于差是可分配的.

证 $(C\cap A)-(C\cap B)$

$$=(C\cap A)\cap(C\cap B)'$$

$$=(C\cap A)\cap(C'\cup B')$$

$$=(C\cap A\cap C')\cup(C\cap A\cap B')$$

$$=\phi\cup(C\cap A\cap B')$$

$$=C\cap(A-B)$$

定义 6　设 A,B 是两个集，则称 $(A-B)\cup(B-A)$ 为 A 与 B 的对称差，记为 $A\triangle B$。

显然有

（1） $A\triangle B=(A-B)+(B-A)$；

（2） $A\cup B=(A\triangle B)+(A\cap B)$。

3. 上限集与下限集

定义 7　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集．由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一列集的上限集，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$；而由属于集列中从某个指标 $n_0(\omega)$（这个指标不是固定的，而是与元素 ω 有关）以后所有集 A_n 的那种元素 ω（即除去有限多个集外的所有集 A_n 都含有的那种元素）的全体所组成的集称为这一列集的下限集，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{\omega \mid \omega \text{ 属于无限多个} A_n\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{\omega \mid \text{存在正整数 } n_0(\omega)\text{，使得当 } n>n_0(\omega)$$

时，$\omega\in A_n\}$

由定义显然有，

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

例 1　设 $A_{2n-1}=A$，$A_{2n}=B(n=1,2,\cdots)$，则

（1） $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=A\cup B$；

（2） $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=A\cap B$。

证（1）设 $\omega\in A\cup B$，不妨设 $\omega\in A$，于是有

$$\omega\in A_{2n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

由上限集的定义知，$\omega\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，故有

$$A\cup B\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.7}$$

另一方面，设 $\omega\in(A\cup B)'$，即$\omega\notin A\cup B$，于是$\omega\notin A$且$\omega\notin B$，故 $\omega\notin A_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，因而$\omega\notin\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$， 即 $\omega\in\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)'$，于是有

$$(A\cup B)'\subset\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)'$$

即

$$A\cup B\supset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.8}$$

由（1.7）与（1.8）即得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=A\cup B$$

（2）设$\omega\in A\cap B$，则$\omega\in A$且$\omega\in B$，于是$\omega\in A_n$（$n=1,2,3\cdots$），由下限集的定义知，$\omega\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，故有

$$A\cap B\subset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.9}$$

另一方面，设$\omega\in(A\cap B)'$，即 $\omega\notin A\cap B$，不妨设 $\omega\notin A$，即$\omega\notin A_{2n-1}(n=1,2,3,\cdots)$，因而$\omega\notin\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，即$\omega\in\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)'$，于是有

$$(A\cap B)'\subset\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)'$$

即

$$(A\cap B)\supset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.10}$$

由（1.9）与（1.10）即得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\cap B$$

例 2　设$A_n\,(n=1,2,3,\ \cdots)$是如下一列点集：

$$A_{2n+1}=\left[0,\ 2-\frac{1}{n+1}\right],\ n=0,1,2,\cdots$$

$$A_{2n}=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right],\ n=1,2,3,\ \cdots$$

我们来确定集列$\{A_n\}$的上限集和下限集。

因为闭区间$[0,1]$中的点属于每个$A_n(n=1,2,3,\cdots)$，故

$$[0,1]\subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

对于区间$(1,2]$中的每个点x，必存在正整数$n_0(x)$，使得当$n>n_0(x)$时，

$$x>1+\frac{1}{n}，\ 即\ x\notin A_{2n}$$

又区间$[0,2]$以外的点都不属于任何A_n，因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0,1]$$

对于区间$(1,2)$中的每个点x，必存在正整数$n_0(x)$，使得当$n>n_0(x)$时，

$$x<2-\frac{1}{n+1}，\ 即\ x\in A_{2n+1}$$

又点$x=2$仅属于A_2，因此，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0,2)$$

定理 7　设$\{A_n\}$是任意一列集，则

（1）$$\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right)'=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n' \tag{1.11}$$

（2）$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right)'=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n' \tag{1.12}$$

证（1）

$$\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)' = \{\omega \mid 有无限多个 A_n 不含 \omega\}$$

$$= \{\omega \mid \omega 属于无限多个 A'_n\}$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} A'_n$$

（1.12）可以类似地证明。

定理 8 设$\{A_n\}$是任意一列集，则

（1）$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1.13}$$

（2）$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \tag{1.14}$$

证（1）$\omega \in \varlimsup_{n\to\infty} A_n \Longleftrightarrow$ 对于所有的 n，存在 $k \geqslant n$，使 $\omega \in A_k \Longleftrightarrow$ 对于所有的 n，$\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Longleftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

$$\therefore \quad \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

（2）$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \left[\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right)'\right]' = \left[\varlimsup_{n\to\infty} A'_n\right]'$$

$$= \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A'_k\right]' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right]'$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

定义 8 如果集列$\{A_n\}$的上限集和下限集相等，即

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n$$

则称集列$\{A_n\}$收敛，这时称$A = \varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$为集列$\{A_n\}$的极限（或极限集），记为

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

例如，上面例 1 中的集列收敛的充要条件是

$$A\cup B=A\cap B$$

即 $A=B$。

定义 9 设$\{A_n\}$是一集列，如果

$$A_n\subset A_{n+1}\quad (n=1,2,\cdots)$$

则称$\{A_n\}$是**单调增加集列**，并记为 $A_n\uparrow$；如果

$$A_n\supset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$$

则称$\{A_n\}$是**单调减少集列**，并记为 $A_n\downarrow$，单调增加和单调减少集列统称为**单调集列**。

关于单调集列下面的定理显然成立。

定理 9 单调集列都是收敛的，且

如果 $A_n\uparrow$，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{1.15}$$

如果 $A_n\downarrow$，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \tag{1.16}$$

在$\{A_n\}$单调增加的情况，(1.15) 可简记为 $A_n\uparrow A$，其中 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$；在$\{A_n\}$单调减少的情况，(1.16) 可简记为 $A_n\downarrow A$，其中 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$。

例 3 设

$$A_n=\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right],\ B_n=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right]\ (n=1,\ 2,\cdots)$$

则

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right]=[0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right) = [0,1]$$

习 题 1·1

1. 证明下列关于集的等式。

(1) $A\cap(A-B)=A-B$,

(2) $A-(A-B)=A\cap B$,

(3) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$,

(4) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$,

(5) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$,

(6) $A-B=(A\cup B)-B=A-(A\cap B)$,

(7) $(A\cup B)\cup(B-A)=A\cup B$,

(8) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$,

(9) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$,

(10) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)-C$,

(11) $A\cup B\cup C=(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$,

(12) $(A\cup B)\cap(A'\cup C)=(A\cap C)\cup(A'\cap B)$,

(13) $[(A\cap C)\cup(B\cap C')]'=(A'\cap C)\cup(B'\cap C')$,

(14) $[(A\cup C)\cap(B\cup C')]'=(A'\cup C)\cap(B'\cup C')$,

(15) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$,

(16) $A'\triangle B'=A\triangle B$,

(17) $C\cap(A\triangle B)=(C\cap A)\triangle(C\cap B)$,

(18) $(A\cap B)\cup(A'\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A'\cap C)$.

2. 证明:

(1) $\bigcup_{t\in T}A_t-A=\bigcup_{t\in T}(A_t-A)$,

(2) $\bigcap_{t\in T}A_t-A=\bigcap_{t\in T}(A_t-A)$,

(3) $A-\bigcup_{t\in T}A_t=\bigcap_{t\in T}(A-A_t)$,

(4) $A-\bigcap_{t\in T}A_t=\bigcup_{t\in T}(A-A_t)$.

3. 设$\{A_n\}$是单调减少集列，证明

$$A_1=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n+1})+\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

4. 设$\{A_k\}$是任意集列，证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

5. 设$\{x_n\}$是一列实数。令$A_n=(-\infty,x_n)$，问$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$与$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$之间有何关系（类似地考虑下极限和下限集之间的关系）？

6. 设A_n是坐标平面上以点$(\frac{(-1)^n}{n},0)$为中心，半径为1的圆的内部，求$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

7. 设$A_{3n}=A$，$A_{3n-1}=B$，$A_{3n-2}=C$，$n=1,2,\cdots$，求集列$\{A_n\}$的上限集和下限集。

8. 设$A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n})$，$A_{2n}=(0,n)$，$n=1,2,\cdots$，求集列$\{A_n\}$的上限集和下限集。

9. 设$A_{2n-1}=(\frac{1}{n},1)$，$A_{2n}=(0,1+\frac{1}{n})$，$n=1,2,\cdots$，求集列$\{A_n\}$的上限集和下限集。

10. 设$\{A_n\}$与$\{B_n\}$是任意集列，证明

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\cup\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n$，

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)\supset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\cup\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n$，

(3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n)\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\cap\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n$，

(4) $\overline{\lim\limits_{n}}(A_n\cap B_n)\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\cap\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n$.

11. 设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在，$B$是任意一个集，证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n-B)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n-B$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(B-A_n)=B-\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

12. 设$\{A_n\}$是任意集列，B是任意一个集，证明

（1）$\overline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\cup B)=(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)\cup B$,

（2）$\overline{\lim_{n\to\infty}}(A_n\cap B)=(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)\cap B$,

（3）$\underline{\lim}_{n\to\infty}(A_n\cup B)=(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)\cup B$,

（4）$\underline{\lim}_{n\to\infty}(A_n\cap B)=(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)\cap B$.

§1·2 集 类

以某个固定的空间Ω的某些子集为元素的集称为集类，简称类。集类用草写字母$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，…，$\mathscr{F}$ 等表示，例如Ω的子集的全体就是一个类。

设$\mathscr{F}$是Ω的某些子集所组成的一个类，A是Ω的一个固定子集，则记号

$$\mathscr{F}\cap A$$

表示由一切形如$E\cap A$的集组成的类，其中$E\in\mathscr{F}$.

定义 1 设Ω是一个空间，$\mathscr{F}$是Ω的某些子集所组成的非空类，如果对于任何$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，都有

$$A\cup B\in\mathscr{F}$$

则称$\mathscr{F}$对和运算是封闭的.

如果对于任何$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，都有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$$

则称$\mathscr{F}$对可列和运算是封闭的.

集类对交、可列交、差、补等运算的封闭性可以完全类似地定义.

定义 2 设Ω是一个空间，$\mathscr{F}$是Ω的某些子集组成的非

空类，如果$\mathscr{F}$对和与差运算均封闭，则称$\mathscr{F}$是一个环。特别如果又有$\Omega\in\mathscr{F}$，则称$\mathscr{F}$是一个代数。

下面举几个环的例子。

例 1 只包含一个空集的单元类$\{\phi\}$是一个环。

例 2 Ω的一切子集所组成的类$\mathscr{F}$是一个代数。

例 3 Ω的有限子集（包括空集ϕ）的全体组成的类$\mathscr{F}$是一个环。

例 4 设Ω是一无限集，则Ω的有限子集（包括空集ϕ）及可列子集的全体所组成的类$\mathscr{F}$是一个环，当Ω本身是可列集时，$\mathscr{F}$是一个代数。

例 5 设R是全体实数，$\mathscr{F}$是由有限个左开右闭的有限区间的和集$E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k]$的全体所组成的类，则$\mathscr{F}$是一个环。

下面验证这一事实。首先注意空集ϕ可以看成是区间$(a,a]$，因而它是$\mathscr{F}$中的元素。易知任何两个左开右闭的区间$(a,b]$，$(c,d]$的差集只可能有三种情况：或者是空集，或者是一个左开右闭的区间，或者是两个不相交的左开右闭区间的和集，于是由集代数的公式（参见§1.1的习题2）

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k-A=\bigcup_{k=1}^{n}(A_k-A)$$

$$A-\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\bigcap_{k=1}^{n}(A-A_k)$$

及第一分配律可知，$\mathscr{F}$中的任两个集的差都可用有限个左开右闭区间的和来表示，因而是$\mathscr{F}$的元素，故$\mathscr{F}$对差运算封闭。$\mathscr{F}$对和运算的封闭性是显然的。因此$\mathscr{F}$是环。

显然$\mathscr{F}$中的元素都可以表成有限个两两不相交的左开右闭的区间的和，但表示法不唯一。

例 6 设Ω是二维欧氏空间，当 $a\leqslant b$、$c\leqslant d$时，称

$$E=\{(x,y)\,|\,a<x\leqslant b,c<y\leqslant d\}$$

为Ω中的左下开右上闭的矩形，仿照上例可证，由有限个左下开右上闭矩形的和集的全体所组成的类$\mathscr{F}$是一个环。

易知环具有以下性质：

（1）空集ϕ是任何环的元素；

（2）环对有限和运算封闭，即对于环$\mathscr{F}$中的任意有限个元素$E_1,E_2,\cdots,E_n$，和集$\bigcup_{k=1}^{n}E_k$也属于$\mathscr{F}$；

（3）代数对补运算封闭；

（4）环对有限交运算封闭。

前三个性质可直接由环和代数的定义推出，第四个性质由集代数的公式

$$A\cap B=(A\cup B)-(A-B)-(B-A)$$

及环的定义即可推出。

引理 1 设T是非空参数集，如果对每个$t\in T$，集类$\mathscr{F}_t$都对某运算封闭，则集类$\bigcap_{t\in T}\mathscr{F}_t$也对这个运算封闭。

证 我们仅就二元运算（下面用符号"$\circ$"表示这种运算）的情况来叙述，其它运算（例如可列和、可列交和补等）情况与此类似。

设对每个$t\in T$，$\mathscr{F}_t$对运算"$\circ$"封闭。设A、$B\in\bigcap_{t\in T}\mathscr{F}_t$，则对每个$t\in T$，$A$、$B\in\mathscr{F}_t$，因为$\mathscr{F}_t$对"$\circ$"封闭，所以$A\circ B\in\mathscr{F}_t$，故$A\circ B\in\bigcap_{t\in T}\mathscr{F}_t$，即$\bigcap_{t\in T}\mathscr{F}_t$对"$\circ$"封闭。

定理 1 设$\mathscr{A}$是由空间Ω的某些子集所成的类，则必定有唯一的环$\mathscr{F}$，使得

（i）$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$，

（2）对于任何包含$\mathscr{A}$的环$\mathscr{F}_1$都有$\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_1$.

以上性质表明，$\mathscr{F}$是包含$\mathscr{A}$的最小环，我们称它为由$\mathscr{A}$产生的环，记之为$\mathscr{R}(\mathscr{A})$.

证 因为由Ω的一切子集所组成的类是一个环，这就说明了至少有一个包含$\mathscr{A}$的环存在。此外，由引理1知，任意多个环的交仍是一个环。于是容易看出，包含$\mathscr{A}$的一切环之交就是我们所要求的环$\mathscr{F}$.

例7 设Ω是一个空间，$\mathscr{A}$是由Ω的单元集全体所组成的类，则$\mathscr{R}(\mathscr{A})$就是由Ω的有限子集（包括空集）的全体所组成的环（见例3）.

例8 令$\mathscr{A}$表示实数轴上左开右闭区间$(a, b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$的全体所组成的类，则$\mathscr{R}(\mathscr{A})$就是前面例5中的环。

定义3 设Ω是一个空间，$\mathscr{F}$是Ω的某些子集所组成的非空类，如果$\mathscr{F}$对差及可列和运算都封闭，则称$\mathscr{F}$是一个σ-环，如果又有$\Omega\in\mathscr{F}$，则称$\mathscr{F}$是一个σ-代数或波莱尔（Borel）体。

前面例1，2，4中的环都是σ-环，例5，6中的环都不是σ-环，当Ω是有限集时，例3中的环是σ-环，如果Ω是无限集，则这个环不是σ-环。

易知σ-环具有以下性质：

（1）空集ϕ属于任何σ-环，

（2）σ-环必是环，

（3）σ-环对可列交运算是封闭的。

前两个性质可直接由环的定义推出。第三个性质可由等式

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n = E-\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-E_n)$$

推出，式中 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$。

例 9　$\mathscr{F}=\{\Omega,\phi\}$ 是 σ-代数。因为任何代数都含有 Ω 与 ϕ，故 $\mathscr{F}=\{\Omega,\phi\}$ 是以 Ω 为空间的最小 σ-代数（也是以 Ω 为空间的最小的代数）。Ω 的一切子集所组成的类则是以 Ω 为空间的最大 σ-代数。

定理 2　设 $\mathscr{A}$ 是由空间 Ω 的某些子集所组成的类，则必定有唯一的 σ-环 $\mathscr{F}$，使得

（1） $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$,

（2） 对于任何包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-环 $\mathscr{F}_1$ 都有 $\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_1$。

以上性质表明，$\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-环，我们称它为 $\mathscr{A}$ 产生的 σ-环，记之为 $\mathscr{S}(\mathscr{A})$。

证　仿照定理 1 的证明可知，包含 $\mathscr{A}$ 的一切 σ-环的交就是所求的 σ-环 $\mathscr{F}$。

同理，存在包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-代数，它就是包含 $\mathscr{A}$ 的一切 σ-代数的交，我们用记号 $\sigma(\mathscr{A})$ 来表示。

例10　设 Ω 是一可列集，$\mathscr{A}$ 是由 Ω 的单元集的全体所组成的类，则 $\sigma(\mathscr{A})$ 是 Ω 的一切子集所组成的类。

例11　设 Ω 是一空间，$A\subset\Omega$, $\mathscr{A}=\{A\}$ 是一个单元类，则 $\sigma(\mathscr{A})=\{\Omega,\phi,A,A'\}$。

定义 4　设 $\Omega=(-\infty,+\infty)$, $\mathscr{A}$ 是所有左开右闭的有限区间所组成的类，即

$$\mathscr{A}=\{(a,b]\mid -\infty<a<b<+\infty\}$$

则称 $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ 中的集为波莱尔集。波莱尔集的全体有时也记为 $\mathscr{B}$。显然 $\Omega\in\mathscr{B}$，即 $\mathscr{B}$ 是 σ-代数，因此有 $\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{A})$。

设 $\mathscr{F}$ 是由有限个左开右闭的有限区间的和集的全体所组成的类（见例 5），则显然有

$$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{A})=\sigma(\mathscr{F})$$

（参看例 8）.

定义 5 设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所组成的类，如果对于$\mathscr{F}$中任何一个单调集列$\{A_n\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} A_n\in\mathscr{F}$$

则称$\mathscr{F}$是一单调类。

定理 3 设$\mathscr{A}$是Ω的某些子集所成的类，则必定有唯一的单调类$\mathscr{F}$，使得

（1）$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$，

（2）对于包含$\mathscr{A}$的任何单调类$\mathscr{F}_1$都有

$$\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_1$$

以上性质表明，$\mathscr{F}$是包含$\mathscr{A}$的最小单调类，我们称它为由$\mathscr{A}$产生的单调类，记之为$\mathscr{M}(\mathscr{A})$。

证 仿照定理 1 的证明可知，包含$\mathscr{A}$的一切单调类的交就是所求的单调类$\mathscr{M}(\mathscr{A})$。

定理 4 σ-环必是单调类，单调环必是σ-环。

证 设$\mathscr{F}$是一σ-环，$\{A_n\}$是一单调集列，且$A_n\in\mathscr{F}$，由于$\mathscr{F}$封闭于可列和运算，故当$\{A_n\}$单调增加时，有

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$$

由于$\mathscr{F}$封闭于可列交运算，故当$\{A_n\}$单调减少时，有

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$$

于是就证明了$\mathscr{F}$是单调类。

现在设$\mathscr{F}$是个单调环，即$\mathscr{F}$是单调类，也是一个环。要证明$\mathscr{F}$是σ-环，只要证明$\mathscr{F}$对可列和封闭。设$A_n\in\mathscr{F}$

$(n=1, 2, \cdots)$，记$B_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$，由于$\mathscr{F}$是环，故$B_n\in\mathscr{F}$，因为$\{B_n\}$单调上升，而$\mathscr{F}$是一单调类，故$\lim\limits_{n\to\infty}B_n\in\mathscr{F}$。
但

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

故$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，因此$\mathscr{F}$对可列和运算是封闭的，于是我们就证明了$\mathscr{F}$是 σ-环。

引理2 设Ω是一空间，$\mathscr{A}$是Ω的某些子集所组成的单调类，对于任何集$A\subset\Omega$，记

$\mathscr{H}(A)=\{B|B\subset\Omega$，且$A-B$，$B-A$，$A\cup B$都属于$\mathscr{A}\}$
则$\mathscr{H}(A)$是一个单调类。

证 设$\{B_n\}$是$\mathscr{H}(A)$中任一单调集列，则

$A-B_n\in\mathscr{A}$，$B_n-A\in\mathscr{A}$，$A\cup B_n\in\mathscr{A}$ 显然集列 $\{A-B_n\}$，$\{B_n-A\}$，$\{A\cup B_n\}$ 都是单调的，因为$\mathscr{A}$是单调类，故上述三个序列的极限都属于$\mathscr{A}$，但

$$\lim_{n\to\infty}(A-B_n)=A-\lim_{n\to\infty}B_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(B_n-A)=\lim_{n\to\infty}B_n-A$$

$$\lim_{n\to\infty}(A\cup B_n)=A\cup\lim_{n\to\infty}B_n$$

（参看习题1.1第11题与第12题），所以$\lim\limits_{n\to\infty}B_n\in\mathscr{H}(A)$，这就说明$\mathscr{H}(A)$是单调类。

引理3 设Ω是一空间，$\mathscr{F}$是Ω的某些子集所组成的环，则$\mathscr{M}(\mathscr{F})$是环。

证 对于任何集$A\subset\Omega$，记

$\mathscr{H}(A)=\{B|B\subset\Omega$，且$A-B$，$B-A$，$A\cup B$ 都属于$\mathscr{M}$

$(\mathscr{F})\}$

由于 $\mathscr{H}(A)$的定义中A和B的地位是对称的，故$B\in\mathscr{H}(A)$与$A\in\mathscr{H}(B)$等价。由于$\mathscr{F}$是环，故对于任何$A\in\mathscr{F}$,$B\in\mathscr{F}$，必有$B\in\mathscr{H}(A)$，故$\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(A)$。而由引理2知$\mathscr{H}(A)$是单调类，故$\mathscr{M}(\mathscr{F})\subset\mathscr{H}(A)$，即对于$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$有

$$B\in\mathscr{H}(A),\ 即\ A\in\mathscr{H}(B)$$

因此当$B\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$时，有

$$\mathscr{F}\subset\mathscr{H}(B)$$

由于$\mathscr{H}(B)$是单调类，故得$\mathscr{M}(\mathscr{F})\subset\mathscr{H}(B)$，这就是说，对于任何$A\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$，$B\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$，都有$A\in\mathscr{H}(B)$，而由$\mathscr{H}(B)$的定义，这就是$A-B$，$B-A$，$A\cup B$都属于$\mathscr{M}(\mathscr{F})$，即$\mathscr{M}(\mathscr{F})$对和与差运算封闭，因而是一个环。

定理5 设$\mathscr{F}$是由空间Ω的某些子集所组成的环，则

$$\mathscr{S}(\mathscr{F})=\mathscr{M}(\mathscr{F})$$

证 因为$\mathscr{S}(\mathscr{F})$是包含$\mathscr{F}$的σ-环，由定理4知它是单调类，但$\mathscr{M}(\mathscr{F})$是包含$\mathscr{F}$的最小单调类，故

$$\mathscr{M}(\mathscr{F})\subset\mathscr{S}(\mathscr{F})$$

又由引理3知，$\mathscr{M}(\mathscr{F})$是环，因而它是单调环，于是由定理4知它是σ-环，但$\mathscr{S}(\mathscr{F})$是包含$\mathscr{F}$的最小σ-环，故而

$$\mathscr{S}(\mathscr{F})\subset\mathscr{M}(\mathscr{F})$$

于是$\mathscr{S}(\mathscr{F})=\mathscr{M}(\mathscr{F})$得证。

推论 设$\mathscr{A}$与$\mathscr{F}$都是由Ω的某些子集所组成的类，如果$\mathscr{A}$是单调类，$\mathscr{F}$是环，而且$\mathscr{F}\subset\mathscr{A}$，则

$$\mathscr{S}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}$$

证 由假设$\mathscr{A}$是包含环$\mathscr{F}$的单调类，故$\mathscr{M}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}$。又由定理5，$\mathscr{M}(\mathscr{F})=\mathscr{S}(\mathscr{F})$。所以，$\mathscr{S}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}$。

习　题　1·2

1. 设$\mathscr{F}$是由有限个左闭右开的有限区间的和集的全体所组成的类，则$\mathscr{F}$是一个环。

2. 设$\mathscr{F}$是由有限个端点为有理数的左开右闭的有限区间的和集的全体所组成的类，$\mathscr{F}$是否为环？

3. 由有限个开区间的和集的全体所组成的类是否为环？由有限个闭区间的和集的全体所成的类是否为环？

4. 设$\mathscr{F}$是由有限个区间（包括开的、闭的、半开半闭的）的和集的全体所组成的类，则$\mathscr{F}$是否为一个环？

5. 设Ω是一空间，$\mathscr{A}$是Ω的某些子集所成的类，求$\mathscr{R}(\mathscr{A})$。

（1）$\mathscr{A}=\{A\}$；

（2）$\mathscr{A}=\{A, B\}$；

（3）A是Ω的一个固定子集，$\mathscr{A}$是由包含A的一切集所成的类，即

$$\mathscr{A}=\{B \mid A\subset B\subset \Omega\}$$

（4）$\mathscr{A}$是恰好包含Ω中两个不同元素的一切集所组成的类。

6. 设Ω是实直线，求$\mathscr{R}$（$\mathscr{A}$）：

（1）$\mathscr{A}$是Ω中一切有限开区间所组成的类；

（2）$\mathscr{A}$是Ω中一切有限闭区间所组成的类；

（3）$\mathscr{A}$是Ω中一切形如$(-\infty, a)$的区间所组成的类；

（4）$\mathscr{A}$是Ω中一切形如$[a, +\infty)$的区间所组成的类。

7. 设Ω是不可列集，$\mathscr{F}$是一个类，它的元素$E\subset\Omega$是有限或可列集，或是以有限或可列集为补集的集，则$\mathscr{F}$是一个σ-代数。

8. 设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所组成的类，证明$\mathscr{F}$为环的充要条件是：

（1）对有限直和运算封闭；

（2）对差运算封闭。

9. 设$\mathscr{F}$是σ-环，如果$A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\in\mathscr{F}, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\in\mathscr{F}$$

10. 设$\mathscr{A}$是一个环，

$$\mathscr{F}=\{A \mid \text{或}A\in\mathscr{A},\ \text{或}A'\in\mathscr{A}\}$$

则$\mathscr{F}$是一个代数.

11．设$\mathscr{F}$是Ω的某些子集组成的类，则$\mathscr{F}$是σ-代数的充要条件是.

（1）$\mathscr{F}$对可列和运算封闭；

（2）$\mathscr{F}$对补运算封闭。

12．设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所组成的非空类，如果$\mathscr{F}$对交运算封闭，则称$\mathscr{F}$为π-类。证明实直线上所有有限的左开右闭区间的全体所构成的类是π-类。

13．设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所组成的非空类，如果

（1）$\Omega\in\mathscr{F}$；

（2）对直和与真差运算封闭；

（3）如果$A_n\in\mathscr{F}(n=1, 2, \cdots)$，且$\{A_n\}$单调增加，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\in\mathscr{F}$$

则称$\mathscr{F}$为λ-类。证明集类为σ-代数的充要条件是它既是λ-类又是π-类。

14．在适当的空间中构造一个集类$\mathscr{F}$，使$\mathscr{F}$是σ-环但不是σ-代数，并使得$\mathscr{F}$中所有集的和是整个空间．

15．设$\mathscr{A}$是Ω的某些子集所组成的任意集类，A是Ω的任意子集，则

$$\mathscr{S}(\mathscr{A})\cap A=\mathscr{S}(\mathscr{A}\cap A)$$

16．设$\Omega=(-\infty, +\infty)$，令

$\mathscr{A}_1=\{(a, b) \mid -\infty<a<b<+\infty\}$

$\mathscr{A}_2=\{[a, b] \mid -\infty<a<b<+\infty\}$

$\mathscr{A}_3=\{[a, b) \mid -\infty<a<b<+\infty\}$

$\mathscr{A}_4=\{(-\infty, a] \mid -\infty<a<+\infty\}$

$\mathscr{A}_5=\{(-\infty, a) \mid -\infty<a<+\infty\}$

$\mathscr{A}_6=\{[a, +\infty) \mid -\infty<a<+\infty\}$

$\mathscr{A}_7=\{(a, +\infty) \mid -\infty<a<+\infty\}$

$\mathscr{A}_8=\{\Omega\text{中的开集}\}$

$\mathscr{A}_9=\{\Omega\text{中的闭集}\}$

证明

$$\sigma(\mathscr{A}_k)=\mathscr{B} \qquad (k=1, 2, \cdots, 9)$$

第二章　测度和外测度

§2·1　测度的定义及其基本性质

定义1　设$\mathscr{F}$是一个集类，如果对于$\mathscr{F}$中的每一个集E（即$\mathscr{F}$的一个元素）都有一个数$P(E)$与之对应，那末我们称P是定义在$\mathscr{F}$上的一个集函数。

我们允许集函数P的值可以是无限的，但它们要有一定的符号，为此我们引用“非正真”的数$+\infty$和$-\infty$，并规定它们的运算法则及它们和任何实数x的关系如下：

$$+\infty\pm x=+\infty+(+\infty)$$
$$=+\infty-(-\infty)=+\infty$$
$$-\infty\pm x=-\infty+(-\infty)$$
$$=-\infty-(+\infty)=-\infty$$

若$x>0$，则

$$(+\infty)x=x(+\infty)=+\infty$$
$$(-\infty)x=x(-\infty)=-\infty$$

若$x<0$，则

$$(+\infty)x=x(+\infty)=-\infty$$
$$(-\infty)x=x(-\infty)=+\infty$$
$$0(\pm\infty)=(\pm\infty)0=0$$
$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$$
$$(+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0$$

$$|\pm\infty|=+\infty,\quad -(-\infty)=+\infty$$

$$-(+\infty)=-\infty,\quad -\infty<x<+\infty$$

但下面的记号是没有意义的：

$$+\infty-(+\infty),\quad -\infty-(-\infty)$$

$$+\infty+(-\infty),\quad -\infty+(+\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad \frac{x}{0}$$

注：有时也将$+\infty$简记为∞。

我们用$\overline{R}$表示实数的全体R再加上$+\infty$、$-\infty$所成的"推广数集"，也称$\overline{R}$中的元素为广义实数．数直线上补入$+\infty$和$-\infty$后，称为扩张的数直线。

于是集函数就是以集类为定义域，集为变元，在$\overline{R}$中取值的函数。

例 1　设$\mathscr{F}$是Ω的有限子集的全体所成的类，对于每个$A\in\mathscr{F}$，令

$$P(A)=A\text{中元素的个数}$$

则P是定义在$\mathscr{F}$上的实值集函数。

例 2　设Ω是一无限集，$\mathscr{F}$是Ω的有限子集与可列子集的全体所成的类，对于每个$A\in\mathscr{F}$，令

$$P(A)=\begin{cases} A\text{中元素的个数，当}A\text{为有限集} \\ +\infty\text{，当}A\text{为可列集}\end{cases}$$

则P是定义在$\mathscr{F}$上的广义实值函数。

定义 2　设P是定义在集类$\mathscr{F}$上的集函数．如果对于任何$A,B\in\mathscr{F}$，当$A\cap B=\phi$且$A+B\in\mathscr{F}$时，恒有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

则称P具有可加性。

如果对于$\mathscr{F}$的任何不相交的有限子类$\{A_1,\cdots, A_n\}$，当

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$$

时，恒有

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

则称P具有有限可加性。

如果对于$\mathscr{F}$中之集的任何不相交叙列$\{A_n\}$，当

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

时，恒有

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称P具有可列可加性（也称完全可加性或σ-可加性）。

定义 3 设P是定义在环$\mathscr{F}$上的非负广义实值集函数，如果它具有可列可加性，且$P(\phi)=0$，则称P为$\mathscr{F}$上的测度。

易知，例 1 与例 2 中的集函数都是测度。

设$\mathscr{F}$是任一个环，对于任何$A\in\mathscr{F}$，均令$P(A)=+\infty$，则P是$\mathscr{F}$上的一个非负的具有可列可加性的集函数。容易看到，除了这个恒取$+\infty$值的平凡情况外，以上定义中$P(\phi)=0$的条件可由P的可列可加性推出。事实上，对任何$A\in\mathscr{F}$，有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A+\phi+\phi+\cdots) \\ &= P(A)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots \end{aligned}$$

如果存在$A\in\mathscr{F}$，使$P(A)$为有限数，则由上式立即推出$P(\phi)=0$。于是上述关于测度的定义也可以简单地说成：定义在环$\mathscr{F}$上的具有可列可加性且不恒等于$+\infty$的非负广义实值函数，

称为环$\mathscr{F}$上的测度。

例 3 设Ω是一空间，$\mathscr{F}=\{\Omega,\phi\}$，令

$$P(\Omega)=1,\quad P(\phi)=0$$

则P是$\mathscr{F}$上的测度。

例 4 设$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\cdots\}$，$\mathscr{F}$是$\Omega$的一切子集所成的类，$p_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，$A\in\mathscr{F}$，令

$$P(A)=\sum_{\omega_n\in A}p_n,\quad P(\phi)=0$$

则P是$\mathscr{F}$上的测度。

定义 4 $\mathscr{F}$是由Ω的某些子集所成的环，P是$\mathscr{F}$上的测度，$A\in\mathscr{F}$，如果$P(A)<+\infty$，则称A具有**有限测度**。

如果任何$A\in\mathscr{F}$都具有有限测度，则称测度P是**有限的**；如果$\Omega\in\mathscr{F}$（即$\mathscr{F}$是代数）且$P(\Omega)<+\infty$，则称P是**全有限的**；如果$P(\Omega)=1$，则称P为**概率测度**。

设$A\in\mathscr{F}$，如果存在一列集$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，使得

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\quad 且\quad P(A_n)<+\infty$$

则称A的测度是**σ-有限的**。如果每个$A\in\mathscr{F}$的测度都是σ-有限的，则称P是**σ-有限的**。如果$\Omega\in\mathscr{F}$（即$\mathscr{F}$是代数）且Ω的测度是σ-有限的，则称P是**全σ-有限的**。

例如，例3中的测度是全有限的。在例4中，如果$\sum_{n=1}^{\infty}p_n<+\infty$，则这个例中的测度$P$是全有限的；如果$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=+\infty$，则$P$不是全有限的，但它是全$\sigma$-有限的。

例 5 设Ω是一空间，$\mathscr{F}=\{\Omega,\phi\}$，令

$$P(\phi)=0,\quad P(\Omega)=+\infty$$

则 P 是$\mathscr{F}$上的测度，但 P 不是全σ-有限的。

定理1 环$\mathscr{F}$上的测度具有下列性质：

（1）有限可加性：如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$，且这些集两两不相交，则

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

证 因为

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 + \cdots + A_n + \phi + \phi + \cdots$$

于是由可列可加性及 $P(\phi)=0$即得

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) + P(\phi) + P(\phi) + \cdots = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

（2）单调性：如果A，$B \in \mathscr{F}$，且$A \subset B$，则

$$P(A) \leqslant P(B)$$

证 因为 $A \subset B$，故 $B = A + (B - A)$，于是由可加性有

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \tag{1.1}$$

由于 $P(B-A) \geqslant 0$，故 $P(B) \geqslant P(A)$。

（3）可减性：如果$A, B \in \mathscr{F}$，$A \subset B$，且$P(A) < +\infty$，则

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \tag{1.2}$$

证 因为 $P(A) < +\infty$，故可以（1.1）两端各减去 $P(A)$ 即得（1.2）。

（4）次可列可加性：如果$A_n (n = 1, 2, \cdots)$及 A 都属于$\mathscr{F}$

且 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，则

$$P(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

证 令

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_1' \cdots A_{n-1}' A_n$$

则

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cap A$$

于是由 P 的可列可加性及单调性即得

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

（5）下连续性：如果 $A_n \in \mathscr{F}(n = 1, 2, \cdots)$，$\{A_n\}$ 单调增加，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) \tag{1.3}$$

即

$$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

证 如果对某个 n，$P(A_n) = +\infty$，则（1.3）式显然成立，下面设 $P(A_n) < +\infty (n = 1, 2, \cdots)$。令

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n \geqslant 2)$$

易知

$$\sum_{k=1}^{n} B_k = A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

于是

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k - A_{k-1}) \qquad (A_0 = \phi)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [P(A_k) - P(A_{k-1})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

（6）上连续性：如果 $A_n \in \mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，$\{A_n\}$单调减少，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，且至少有一个$A_n$，使 $P(A_n) < +\infty$，则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \qquad (1.4)$$

即

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

证　不妨设 $P(A_1) < +\infty$。令

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$B_n = A_1 - A_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

易知$\{B_n\}$单调上升，且

$$\lim_{n\to\infty} B_n = A_1 - \lim_{n\to\infty} A_n = A_1 - A$$

于是由（5）有

$$\lim_{n\to\infty} P(A_1 - A_n) = P(A_1 - A)$$

即

$$P(A_1)-\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A_1)-P(A)$$

由于 $P(A_1)<+\infty$，故由上式即得

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

即（1.4）式成立。

定理 2 设$\mathscr{F}$是 σ-环，则$\mathscr{F}$上的测度 P 具有下列性质：

（1）如果 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，则

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty}A_n\right)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}P(A_n) \tag{1.5}$$

证 记 $B_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$，则 $\{B_n\}$ 单调增加，$B_n\subset A_n$，且

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n$$

于是由 P 的下连续性可知

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty}A_n\right)=P\left(\lim_{n\to\infty}B_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}P(A_n)$$

（2）如果 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，而且存在正整数$N$，使得 $P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}A_n\right)<+\infty$，则

$$P(\varlimsup_{n\to\infty}A_n)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}P(A_n) \tag{1.6}$$

证 记 $B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，则$\{B_n\}$ 单调减少，$B_n\supset A_n$，且

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n$$

由于 $P(B_N)<+\infty$，于是由 P 的上连续性可知

$$P\left(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\right)=P\left(\lim_{n\to\infty}B_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}P(A_n)$$

（3）如果$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在，而且存在正整数$N$，使得$P\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}A_n\right)<+\infty$，则

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n) \tag{1.7}$$

证 由（1）与（2）即得。

（4）如果$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，而且存在正整数$N$，使得$\sum\limits_{n=N}^{\infty}P(A_n)<+\infty$，则

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)=0 \tag{1.8}$$

证 由于对任何正整数m

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n$$

故

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)\leqslant P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n) \tag{1.9}$$

由于

$$\sum_{n=N}^{\infty}P(A_n)<+\infty$$

故

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n)=0$$

于是在（1.9）式中令$m\to\infty$，并注意到P的非负性，即得（1.8）。

定理3 设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所成的环，P_1与P_2是$S(\mathscr{F})$的两个测度，当它们限制在$\mathscr{F}$上时是σ-有限的，如果对于每个$A\in\mathscr{F}$，

$$P_1(A)=P_2(A)$$

则在$S(\mathscr{F})$上$P_1\equiv P_2$。

证 记$\mathscr{A}$为 $S(\mathscr{F})$中满足如下条件的一切集A所组成的类：

（1）存在$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，使得 $P_1(A_n)<+\infty$，且

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

（2）对于一切$E\in\mathscr{F}$，当 $P_1(E)<+\infty$，

$$P_1(E\cap A)=P_2(E\cap A)$$

由于P_1在$\mathscr{F}$上σ-有限，且P_1与P_2在$\mathscr{F}$上相等，所以$\mathscr{F}$中的每个集都满足（1）与（2），故有$\mathscr{F}\subset\mathscr{A}$。

下面证明在$\mathscr{A}$上P_1与P_2相等。首先我们注意，因为任何可列和都可以按第一章的公式（1.6）化为可列直和，故条件（1）中的集列$\{A_n\}$可以这样选取，使它们中任何两个互不相交，于是当 $A\in\mathscr{A}$时，存在集列 $A_n\in\mathscr{F}$使得 $P_1(A_n)<+\infty$，且

$$A\subset\sum_{n=1}^{\infty}A_n$$

于是

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A) \tag{1.10}$$

又由条件（2）有

$$P_1(A_n\cap A)=P_2(A_n\cap A) \tag{1.11}$$

由（1.10）与（1.11）立即得到

$$P_1(A)=P_2(A)$$

于是就证明了在$\mathscr{A}$上P_1与P_2相等。

下面证明$\mathscr{A}$是单调类．设 $\{B_m\}$ 是$\mathscr{A}$中任一单调集列，由于每个 B_m满足条件（1），所以在$\mathscr{F}$中存在一列集$\{A_n^{(m)}\}$，使得 $P_1(A_n^{(m)})<+\infty$，且

$$B_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)}$$

由此有

$$\lim_{m\to\infty} B_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)}$$

即$\lim\limits_{m\to\infty} B_m$满足条件（1）．又当 $E\in\mathscr{F}$且 $P_1(E)<+\infty$时，

$$P_1(E\cap B_m)=P_2(E\cap B_m)$$

根据测度的上、下连续性及条件 $P_1(E)<+\infty$有

$$P_1(E\cap \lim_{m\to\infty} B_m)=\lim_{m\to\infty} P_1(E\cap B_m)$$

$$P_2(E\cap \lim_{m\to\infty} B_m)=\lim_{m\to\infty} P_2(E\cap B_m)$$

由以上三式即得

$$P_1(E\cap \lim_{m\to\infty} B_m)=P_2(E\cap \lim_{m\to\infty} B_m)$$

因此$\lim\limits_{m\to\infty} B_m$满足条件（2），于是$\lim\limits_{m\to\infty} B_m\in\mathscr{A}$，故$\mathscr{A}$是单调类．于是由第一章 §1·2定理5 的推论可知 $\mathscr{S}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}$，所以在$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上 $P_1=P_2$．

习　题　2·1

1．设P是环$\mathscr{F}$上的测度，$A,B\in\mathscr{F}$，则

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$$

2．设P是环$\mathscr{F}$上的测度，$A_1,A_2,A_3\in\mathscr{F}$，则

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)\\&-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)\\&+P(A_1\cap A_2\cap A_3)\end{aligned}$$

将这个公式推广到n个集的情况．

3. 设P是定义在环$\mathscr{F}$上的广义实值函数，如果它具有可加性，且$\mathscr{F}$中至少存在一个集A，使$P(A)<+\infty$，则$P(\phi)=0$。

4. 设P是σ-环$\mathscr{F}$上的一个测度，则具有有限测度的一切集所组成的类是一个环，具有σ-有限测度的一切集所组成的类是一个σ-环。

5. 设P是σ-环$\mathscr{F}$上的一个σ-有限测度，如果具有有限测度的一切集所组成的类是一个σ-环，则测度P必为有限。

6. 设$\mathscr{A}$是一个非空类，P是$\mathscr{R}(\mathscr{A})$上的一个测度，如果对于任何$A\in\mathscr{A}$都有$P(A)<+\infty$，则P在$\mathscr{R}(\mathscr{A})$上是有限的。

提示：利用习题1.2第15题中的结论。

7. 举例说明定理2的（2）与（3）中，存在正整数N使得

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}A_n\right)<+\infty$$

的条件是不可省略的。

8. 举例说明在测度的上连续性定理中，至少存在一个A_n使$P(A_n)<+\infty$的条件是不可省略的。

9. 举例说明定理2的（4）中，存在正整数N，使得

$$\sum_{n=N}^{\infty}P(A_n)<+\infty$$

的条件是不可省略的。

10. 设$\mathscr{F}$是习题1.2第7题中的集类，试在$\mathscr{F}$上定义一个不恒为0的测度。

11. 设Ω是任意的一个非空集，$\mathscr{F}$是Ω的所有子集组成的σ-代数。

（1）试在$\mathscr{F}$上定义一个仅取两个值的有限测度；

（2）试在$\mathscr{F}$上定义一个非σ-有限的测度。

12. 设Ω是一可数无限集。$\mathscr{F}$是一个类，它的元素$A\subset\Omega$或是有限集或是有限集的补集。

令

$$P(A)=\begin{cases}0, & \text{如果}A\text{为有限集}\\ 1, & \text{如果}A'\text{为有限集}\end{cases}$$

证明

（1）$\mathscr{F}$是一环；

（2）P具有有限可加性但不具有可列可加性；

（3）Ω是一单调增加集列$\{A_n\}$的极限，其中$A_n\in\mathscr{F}$且$P(A_n)=0$，但$P(\Omega)=1$。

13．设P是定义在环$\mathscr{F}$上的非负有限可加集函数。如果A_1，A_2，…是$\mathscr{F}$中的不相交集且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，证明：

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

§2·2 外测度

定义1 设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所组成的σ-环，P^*是定义在$\mathscr{F}$上的集函数．如果它满足

（1）$P^*(\phi)=0$；

（2）单调性：当$A,B\in\mathscr{F}$，且$A\subset B$时，有

$$P^*(A)\leqslant P^*(B)$$

（3）次可列可加性：当$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$时，有

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P^*(A_n)$$

则称P^*是$\mathscr{F}$上的外测度。

显然，外测度是非负的。事实上，对于任意的$A\in\mathscr{F}$，由于$\phi\subset A$，故由P^*的单调性即得

$$P^*(A)\geqslant P^*(\phi)=0$$

外测度也是次有限可加的，事实上，设$A_k\in\mathscr{F}$（$k=1,2,\cdots,n$），则由P^*的次可列可加性及$P^*(\phi)=0$，有

$$P^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=P^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k+\phi+\phi+\cdots\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} P^*(A_k) + P^*(\phi) + P^*(\phi) + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P^*(A_k)$$

易知，$\mathscr{F}$上的测度一定也是$\mathscr{F}$上的外测度。然而，下面的例子表明，$\mathscr{F}$上的外测度却未必是$\mathscr{F}$上的测度。

例 1　设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所组成的σ-环，令

$$P^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{当} A = \phi \\ 1, & \text{当} A \in \mathscr{F} \text{ 且} A \neq \phi \end{cases}$$

则显然P^*是$\mathscr{F}$上的外测度，但如果$\mathscr{F}$含有两个互不相交的非空集A与B，则

$$P^*(A + B) = 1$$

$$P^*(A) + P^*(B) = 2$$

故P^*不是测度。

引理 1　设$\mathscr{F}$是由空间Ω的某些子集所组成的环，用记号$\mathscr{H}(\mathscr{F})$表示能用$\mathscr{F}$中一列集覆盖的Ω的子集的全体所组成的类，即

$$\mathscr{H}(\mathscr{F}) = \left\{A \mid A \subset \Omega, \text{存在} A_n \in \mathscr{F} (n = 1, 2, \cdots) \text{使} A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

则

（1）$\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\mathscr{F})$；

（2）若$A \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$，则$A$的任何子集也属于$\mathscr{H}(\mathscr{F})$；

（3）$\mathscr{H}(\mathscr{F})$是σ-环。

证　（1）与（2）是显然的。下面证明（3）。由（2）知，$\mathscr{H}(\mathscr{F})$对差运算是封闭的，故只需证明$\mathscr{H}(\mathscr{F})$对可列和运算的封闭性。

设$A_n \in \mathscr{H}(\mathscr{F})(n=1,2,\cdots)$，则对于每个$A_n$，存在$A_n^{(k)} \in \mathscr{F}(k=1,2,\cdots)$，使得

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

于是有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

其中$\{A_n^{(k)}\}(n,k=1,2,\cdots)$是$\mathscr{F}$中的一列集，故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$$

定义2 设$\mathscr{A}$是空间Ω的某些子集组成的非空类，如果当$B \in \mathscr{A}$，$A \subset B$时，恒有$A \in \mathscr{A}$，则称$\mathscr{A}$是可传的。

由引理1易知，$\mathscr{H}(\mathscr{F})$是包含$\mathscr{F}$的最小可传的σ-环，我们称它为由$\mathscr{F}$产生的可传σ-环。

例2 设Ω是任一空间，$\mathscr{F}$是Ω的有限子集（包括空集ϕ）的全体所成的环，则$\mathscr{H}(\mathscr{F})$是Ω的有限子集（包括空集ϕ）和可列子集的全体所成的类。

定理1 设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集所成的环，P是$\mathscr{F}$上的测度，当$A \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$时，令

$$P^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \,\middle|\, A_n \in \mathscr{F} \text{且} A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \tag{2.1}$$

则P^*是$\mathscr{H}(\mathscr{F})$上的外测度，且在$\mathscr{F}$上$P^* = P$。

P^*称为由环$\mathscr{F}$上的测度P引出的外测度。

证 $P^*(\phi)=0$及P^*的单调性可直接由P^*的定义得出。下面证明P^*的次可列可加性。

设$A_n \in \mathscr{H}H(\mathscr{F})(n=1,2,\cdots)$.由于$\mathscr{H}(\mathscr{F})$是$\sigma$-环，故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{H}(\mathscr{F})$$

如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) = +\infty$$

则当然有

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) \tag{2.2}$$

下面考虑所有$P^*(A_n)<+\infty$的情况。任给 $\varepsilon>0$，根据P^*的定义，对于每个 A_n，存在

$$A_n^{(k)} \in \mathscr{F} \quad (k=1,2,\cdots)$$

使得

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^{(k)}$$

且

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_n^{(k)}) \leqslant P^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_n^{(k)}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) + \varepsilon$$

但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k} A_n^{(k)}$$

故有

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_n^{(k)}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) + \varepsilon$$

令$\varepsilon\to 0$就得到（2.2）式。于是就证明了 P^*的次可列可加性.因而证明了 P^*是$\mathscr{H}(\mathscr{F})$上的外测度.

在$\mathscr{F}$上 $P^*=P$ 是显然的. 事实上，设$A\in\mathscr{F}$，则由测度的次可列可加性，对于任何 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，当

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

时，有

$$P(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

故

$$\begin{aligned}P(A)&\leqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\,|\,A_n\in\mathscr{F}\ \text{且}\ A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\\&=P^*(A)\end{aligned}\tag{2.3}$$

另一方面，取$A_1=A,A_n=\phi(n\geqslant 2)$，则$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$且$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，故由$P^*$的定义有

$$P^*(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=P(A)\tag{2.4}$$

由（2.3）与（2.4）即得 $P^*(A)=P(A)$。

定理 2 设 P^*是由环$\mathscr{F}$上的测度P引出的外测度，如果$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$，则

$$P^*(B)=P^*(B\cap A)+P^*(B-A)\tag{2.5}$$

证 由于

$$B=(B\cap A)\cup(B-A)$$

故由P^*的次有限可加性有

$$P^*(B)\leqslant P^*(B\cap A)+P^*(B-A)\tag{2.6}$$

下面证明相反的不等式

$$P^*(B)\geqslant P^*(B\cap A)+P^*(B-A) \tag{2.7}$$

如果$P^*(B)=+\infty$，则（2.7）显然成立。故只要讨论$P^*(B)<+\infty$的情况。

由$P^*(B)$的定义知，对任何$\varepsilon>0$，存在$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，使得$B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，且

$$P^*(B)+\varepsilon>\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n) \tag{2.8}$$

记

$$A_n'=A_n\cap A,\quad A_n''=A_n-A$$

则A_n'，$A_n''\in\mathscr{F}$。显然

$$P(A_n)=P(A_n'+A_n'')=P(A_n')+P(A_n'')$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n'=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap A\supset B\cap A$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n''=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)-A\supset B-A$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n')+\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n'')$$
$$\geqslant P^*(B\cap A)+P^*(B-A) \tag{2.9}$$

从而由（2.8）及（2.9）有

$$P^*(B)+\varepsilon>P^*(B\cap A)+P^*(B-A)$$

令$\varepsilon\to0$即得（2.7），由（2.7）与（2.6）即得（2.5）式。

习　题　2·2

1．设P^*是定义在σ-环$\mathscr{F}$上的具有单调性和次可列可加性的集函数，且P^*不恒等于$+\infty$，P^*是否是$\mathscr{F}$上的外测度？

2. 证明两个外测度之和是一外测度。

3. 设P_1^*与P_2^*是σ-环$\mathscr{F}$上的两个外测度，令

$P^*(A)=\min\{P_1^*(A), P_2^*(A)\}$，$A\in\mathscr{F}$

$Q^*(A)\max\{P_1^*(A), P_2^*(A)\}$，$A\in\mathscr{F}$

P^*与Q^*是否是$\mathscr{F}$上的外测度？

4. 设$\{P_n^*\}$是定义在σ-环$\mathscr{F}$上的外测度叙列，$\{a_n\}$是一个正实数列，令

$$P^*(A)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nP_n^*(A)$$

证明P^*是$\mathscr{F}$上的外测度。

5. 设$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$是恰好包含两个不同点$\omega_1$与$\omega_2$的空间，$\mathscr{F}$是$\Omega$的一切子集组成的类，$P^*$由下式确定：

$P^*(\{\omega_1\})=1$，$P^*(\{\omega_2\})=2$

$P^*(\phi)=0$，$P^*(\Omega)-a$

其中a为广义实数。

（1）当a为何值时P^*是$\mathscr{F}$上的外测度？

（2）当a为何值时P^*是$\mathscr{F}$上的测度？

6. 设Ω是全体正整数的集合，$\mathscr{F}$是由Ω的一切子集组成的类，对于Ω的每个有限子集A，以$P(A)$表示A中点的数目。令

$$P^*(E)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}P(E\cap\{1,2,\cdots,n\}),E\in\mathscr{F}$$

$$Q^*(E)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}P(E\cap\{1,2,\cdots,n\}),\ E\in\mathscr{F}$$

P^*与Q^*是否为$\mathscr{F}$上的外测度？

7. 证明任意多个可传σ-环的交也是一可传σ-环。

8. 证明$\mathscr{H}(\mathscr{F})$是包含$\mathscr{F}$的最小可传σ-环。

9. 设P是σ-环$\mathscr{F}$上的测度，P^*是由P引出的外测度，证明如果P是σ-有限的，则P^*也是σ-有限的。如果P是有限的，是否P^*也有限？

注：关于外测度的有限或σ-有限等概念，可以仿照关于测度的相应概念来定义。

10. 设$\mathscr{F}$是Ω的某些子集所成的σ-环，P是$\mathscr{F}$上的测度，令

$P^*(A)=\inf\{P(B)\,|\,A\subset B\in\mathscr{F}\}$，$A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$

证明P^*就是由P引出的外测度。

11. 如果$\mathscr{F}$是一般的环（即未必是σ-环），上题中的结论是否成立？

12. 设$\mathscr{F}$是Ω的某些子集所成的σ-环，P是$\mathscr{F}$上的测度，令

$$P_*(A)=\sup\{P(B)\mid A\supset B\in\mathscr{F}\},A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$$

称P_*为由P引出的内测度，证明

（1）$P_*(\phi)=0$，$P_*(A)\geqslant 0$　$(A\in\mathscr{H}(\mathscr{F}))$；

（2）设$A,B\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$ 且 $A\subset B$，则

$$P_*(A)\leqslant P_*(B)$$

（3）设$\{A_n\}$是$\mathscr{H}(\mathscr{F})$中之集的不相交叙列，则

$$P_*\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}P_*(A_n)$$

（4）设$A,B\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$，且$A\cap B=\phi$，则

$$P_*(A+B)\leqslant P_*(A)+P_*(B)\leqslant P^*(A+B)$$

§2·3　测度的拓展

上节的定理2启示我们引入下面的定义：

定义1　设P^*是σ-环$\mathscr{F}$上的外测度，$A\in\mathscr{F}$，如果对于任何$B\in\mathscr{F}$都有

$$P^*(B)=P^*(B\cap A)+P^*(B-A)\tag{3.1}$$

则称A是P^*-可测集，P^*-可测集的全体记为$\mathscr{S}^*$.

等式（3.1）称为集A的卡拉太屋独里（Carathéodory）条件，它也可以写为

$$P^*(B)=P^*(B\cap A)+P^*(B\cap A')$$

定理1　设P^*是σ-环$\mathscr{F}$上的外测度，则P^*-可测集的全体$\mathscr{S}^*$是一个σ-环，而且P^*是$\mathscr{S}^*$上的测度.

$\mathscr{S}^*$上的测度P^*称为$\mathscr{F}$上的外测度P^*所引出的测度。

证　分以下几步来证明：

（1）证明 $\mathscr{S}^*$对和运算封闭.

设 A_1，$A_2\in\mathscr{S}^*$，则对于任意的 $B\in\mathscr{F}$，有

$$\begin{aligned}P^*(B)&=P^*(B\cap A_1)+P^*(B\cap A_1')\\&=P^*(B\cap A_1\cap A_2)+P^*(B\cap A_1\cap A_2')\\&\quad+P^*(B\cap A_1'\cap A_2)+P^*(B\cap A_1'\cap A_2')\end{aligned}\tag{3.2}$$

以$B\cap(A_1\cup A_2)$代替（3.2）中的B得

$$\begin{aligned}&P^*(B\cap(A_1\cup A_2))\\&=P^*(B\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1\cap A_2)+P^*(B\cap(A_1\cup A_2)\\&\quad\cap A_1\cap A_2')+P^*(B\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1'\cap A_2)\\&\quad+P^*(B\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1'\cap A_2')\\&=P^*(B\cap A_1\cap A_2)+P^*(B\cap A_1\cap A_2')\\&\quad+P^*(B\cap A_1'\cap A_2)\end{aligned}\tag{3.3}$$

代入（3.2）得

$$\begin{aligned}P^*(B)&=P^*(B\cap(A_1\cup A_2))+P^*(B\cap A_1'\cap A_2')\\&=P^*(B\cap(A_1\cup A_2))+P^*(B\cap(A_1\cup A_2)')\end{aligned}$$

所以集$A_1\cup A_2$满足卡拉太屋独里条件，故 $A_1\cup A_2\in\mathscr{S}^*$.

（2）证明$\mathscr{S}^*$对差运算封闭.

设$A_1,A_2\in\mathscr{S}^*$，$B\in\mathscr{F}$. 用 $B\cap(A_1\cap A_2')'$ 代替（3.2）中的B得

$$\begin{aligned}&P^*(B\cap(A_1\cap A_2')')=P^*(B\cap(A_1'\cup A_2))\\&=P^*(B\cap(A_1'\cup A_2)\cap A_1\cap A_2)+P^*(B\cap(A_1'\cup A_2)\\&\quad\cap A_1\cap A_2')+P^*(B\cap(A_1'\cup A_2)\cap A_1'\cap A_2)\\&\quad+P^*(B\cap(A_1'\cup A_2)\cap A_1'\cap A_2')\\&=P^*(B\cap A_1\cap A_2)+P^*(B\cap A_1'\cap A_2)\\&\quad+P^*(B\cap A_1'\cap A_2')\end{aligned}$$

代入（3.2）式得

$$P^*(B)=P^*(B\cap A_1\cap A_2')+P^*(B\cap(A_1\cap A_2')')$$

所以集$A_1\cap A_2'=A_1-A_2$满足卡拉太屋独里条件，故$A_1-A_2\in\mathscr{S}^*$.

（1）与（2）表明，$\mathscr{S}^*$是一个环。

（3）设$B\in\mathscr{F}$，$A_1,A_2\in\mathscr{S}^*$且 $A_1\cap A_2=\phi$，证明

$$P^*(B\cap A_1+B\cap A_2)=P^*(B\cap A_1)+P^*(B\cap A_2) \tag{3.4}$$

由假设有

$$A_1\cap A_2=\phi,\qquad A_1\cap A_2'=A_1$$

$$A_1'\cap A_2=A_2$$

于是由（3.3）式立即推得（3.4）式。

用归纳法可将（3.4）式推广如下：设 $A_k\in\mathscr{S}^*$（$k=1,2,\cdots,n$）且$A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$，则对任意的 $B\in\mathscr{F}$有

$$P^*\left(\sum_{k=1}^{n}B\cap A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P^*(B\cap A_k) \tag{3.5}$$

（4）证明$\mathscr{S}^*$对可列直和运算封闭。

设$A_n\in\mathscr{S}^*(n=1,2,\cdots)$，$A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$，由于$\mathscr{S}^*$是环，故

$$\sum_{k=1}^{n}A_k\in\mathscr{S}^*$$

于是由卡拉太屋独里条件及（3.5）式，对于任意的 $B\in\mathscr{F}$有

$$P^*(B)=P^*\left(B\cap\sum_{k=1}^{n}A_k\right)+P^*\left(B\cap\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)'\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}P^*(B\cap A_k)+P^*\left(B\cap\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)'\right)$$

令 $n\to\infty$得

$$P^*(B) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} P^*(B \cap A_k) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right)$$

$$\geqslant P^*\left(B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right) \tag{3.6}$$

又

$$B = B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k + B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

故由 P^*的次可加性有

$$P^*(B) \leqslant P^*\left(B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right) \tag{3.7}$$

由（3.6）与（3.7）即得

$$P^*(B) = P^*\left(B \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right) \tag{3.8}$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 满足卡拉太屋独里条件，因而

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{S}^*$$

推论 由（3.6）与（3.8）有

$$P^*(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P^*(B \cap A_k) + P^*\left(B \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)'\right) \tag{3.9}$$

（5）证明 P^*是$\mathscr{S}^*$上的测度。

设 $A_k \in \mathscr{S}^*(k=1,2,\cdots)$且$A_i \cap A_j = \phi(i \neq j)$，在（3.9）式

中令 $B=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ 即得

$$P^*\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P^*(A_k)$$

即 P^*在$\mathscr{S}^*$上可列可加，因而是$\mathscr{S}^*$上的测度。

（6）证明$\mathscr{S}^*$是 σ–环。

设 $A_n\in\mathscr{S}^*$，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$。令

$$B_1=A_1,\quad B_n=A_1^c\cdots A_{n-1}^cA_n\quad(n\geqslant 2)$$

因为$\mathscr{S}^*$是环，故$B_n\in\mathscr{S}^*$，于是由（4）及第一章公式(1.5)有

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{S}^*$$

故$\mathscr{S}^*$对可列和运算封闭，又（2）中已证$\mathscr{S}^*$对差运算封闭，故$\mathscr{S}^*$是 σ–环。

定义 2 设P是环$\mathscr{F}$上的测度，$A\in\mathscr{F}$。如果$P(A)=0$，则称A是 P–零集，简称零集。

由测度的非负性和单调性可知，P–零集的子集如果也属于$\mathscr{F}$就必然也是零集。但对一般环$\mathscr{F}$上的测度P，P–零集的子集不一定属于$\mathscr{F}$。

例1 设Ω是一个空间，$\mathscr{F}=\{\Omega,\phi\}$，

$$P(\Omega)=P(\phi)=0$$

则P是环$\mathscr{F}$上的一个测度．当Ω至少有两个元素时，Ω的每个非空真子集都不属于$\mathscr{F}$。

定义 3 设P是环$\mathscr{F}$上的测度，如果$\mathscr{F}$中任何P–零集的任何子集都必定属于$\mathscr{F}$，则称P是完全测度。

例如，上例中的测度P不是完全的。

例 2 设空间Ω是任意一个非空集，$\mathscr{F}$ 表示Ω 的所有子集的全体所成的环．在Ω中任意定一个元素 a，令

$$P(A)=\begin{cases}0, & 当 a\notin A \\ 1, & 当 a\in A\end{cases} \quad (A\in\mathscr{F})$$

则P是$\mathscr{F}$上的完全测度．

引理 设P^*是σ-环$\mathscr{F}$上的外测度，如果$A\in\mathscr{F}$且 $P^*(A)=0$，则$A\in\mathscr{S}^*$．

证 对任何$B\in\mathscr{F}$，由外测度的单调性及非负性，有

$$0\leqslant P^*(B\cap A)\leqslant P^*(A)=0$$

故有

$$P^*(B\cap A)=0 \tag{3.10}$$

又由P^*的次可加性及（3.10）式有

$$\begin{aligned}P^*(B-A)&\leqslant P^*(B)\\&\leqslant P^*(B\cap A)+P^*(B-A)\\&=P^*(B-A)\end{aligned}$$

上式左右两端相同，因此中间的不等式就成为等式，即

$$P^*(B)=P^*(B\cap A)+P^*(B-A)$$

因此$A\in\mathscr{S}^*$．

定理 2 设$\mathscr{F}$是一个可传σ-环，则由$\mathscr{F}$上的外测度P^*所引出的测度是$\mathscr{S}^*$上的完全测度．

证 设$B\in\mathscr{S}^*$，$A\subset B$且 $P^*(B)=0$．由于 $B\in\mathscr{F}$而$\mathscr{F}$是可传类，故$A\in\mathscr{F}$，由P^*的单调性及非负性有 $P^*(A)=0$，于是由引理知，$A\in\mathscr{S}^*$，故$\mathscr{S}^*$上的 P^*是完全测度．

定义 4 设$\mathscr{F}_1$ 与$\mathscr{F}_2$ 是空间Ω的某些子集所组成的两个环，P_1与P_2分别是$\mathscr{F}_1$与$\mathscr{F}_2$上的测度．如果 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$，且在$\mathscr{F}_1$上$P_1\equiv P_2$，则称$P_2$是 P_1由$\mathscr{F}_1$拓展到$\mathscr{F}_2$的**拓展测度**．

下面我们要讨论如何将环$\mathscr{F}$上的测度拓展到 $\mathscr{F}$所产生的

σ-环$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上去．

定理 3 设P是环$\mathscr{F}$上的测度，P^*是由P引出的$\mathscr{H}(\mathscr{F})$上的外测度，则外测度P^*引出的$\mathscr{S}^*$上的测度是P的拓展测度．

证 定理1已经证明P^*是$\mathscr{S}^*$上的测度，而§2·2的定理2则表明$\mathscr{F}$中的每个集都是P^*-可测集，故有$\mathscr{F}\subset\mathscr{S}^*$，又由§2·2的定理1知，当$A\in\mathscr{F}$时，$P^*(A)=P(A)$．于是就证明了$\mathscr{S}^*$上的测度$P^*$确是$P$的拓展测度．

注：由定理2知，P由$\mathscr{F}$拓展到$\mathscr{S}^*$上的拓展测度P^*是完全测度．

今后我们凡是遇到环$\mathscr{F}$上的测度P，总是立即拓展成为$\mathscr{S}^*$上的测度．在不致发生混淆的情况下，$\mathscr{S}^*$上的这个拓展测度仍用记号P来表示，这样就把P的定义域扩大了．

定理 4 设P是环$\mathscr{F}$上的测度，则在σ-环$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上存在一个测度$\overline{P}$，使得当$A\in\mathscr{F}$时，

$$\overline{P}(A)=P(A)$$

如果P是$\mathscr{F}$上的σ-有限测度，则上述$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上的测度$\overline{P}$是唯一的．

$\overline{P}$称为P由$\mathscr{F}$拓展到$S(\mathscr{F})$的**拓展测度**．

证 存在性实际上已在定理3中证明．事实上，由于$\mathscr{S}^*$是σ-环，且$\mathscr{F}\subset\mathscr{S}^*$，故$\mathscr{S}(\mathscr{F})\subset\mathscr{S}^*$，因此当$A\in\mathscr{S}(\mathscr{F})$时，可令

$$\overline{P}(A)=P^*(A)$$

则$\overline{P}$就是P由$\mathscr{F}$拓展到$S(\mathscr{F})$的拓展测度．

拓展测度的唯一性可直接由§2·1的定理3推出．

今后在不致引起混淆的情况下，对于$\mathscr{S}(\mathscr{F})$或$\mathscr{S}^*$中的集A，我们也将以$P(A)$来代替$\overline{P}(A)$或$P^*(A)$．

定理5 设P是σ-环$\mathscr{F}$上的测度，$\overline{\mathscr{F}}$是一切形如 $A\cup N$之集组成的类，其中 $A\in\mathscr{F}$，N是 $\mathscr{F}$中测度为零之集的子集，即$N\subset M\in\mathscr{F}$且$P(M)=0$，则

（1）$\overline{\mathscr{F}}$是一个σ-环；

（2）由等式$\overline{P}(A\cup N)=P(A)$　　　　(3.11)

确定的集函数$\overline{P}$是$\overline{\mathscr{F}}$上的一个完全测度。

$\overline{P}$称为P的增补测度（简称增补）或完全测度。$\overline{\mathscr{F}}$则称为$\mathscr{F}$相对于P的完全化。

证 分以下几个步骤来证明：

（1）设E_1，$E_2\in\overline{\mathscr{F}}$，则 $E=A_1\cup N_1$，$E_2=A_2\cup N_2$，其中 A_1，$A_2\in\mathscr{F}$，$N_1\subset M_1\in\mathscr{F}$，$N_2\subset M_2\in\mathscr{F}$，且 $P(M_1)=P(M_2)=0$，由集代数易得

$$E_1-E_2=(A_1\cap A'_2\cap M'_2)\cup N,$$

其中 $N\subset M_1\cup M_2$，由于$A_1\cap A'_2\cap M'_2\in\mathscr{F}$，$P(M_1\cup M_2)=0$，故$E_1-E_2\in\overline{\mathscr{F}}$，即$\overline{\mathscr{F}}$对差运算封闭；又显然$\overline{\mathscr{F}}$对可列和运算封闭，故$\overline{\mathscr{F}}$是$\sigma$-环。

（2）由（3.11）定义的$\overline{P}$的值是唯一确定的。

设 $A_1\cup N_1=A_2\cup N_2\in\overline{\mathscr{F}}$，其中

$$A_1\in\mathscr{F},\ N_1\subset M_1\in\mathscr{F},\ P(M_1)=0$$

$$A_2\in\mathscr{F},\ N_2\subset M_2\in\mathscr{F},\ P(M_2)=0$$

我们有

$$P(A_1)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1-A_2)$$

由于

$$A_1-A_2\subset(A_2\cup N_2)-A_2\subset N_2$$

故有 $P(A_1-A_2)=0$，于是有

$$P(A_1)=P(A_1\cap A_2)$$

根据对称性有 $P(A_2)=P(A_1\cap A_2)$，于是有 $P(A_1)=P(A_2)$。

（3）$\overline{P}$是$\overline{\mathscr{F}}$上的测度。

为此只须证$\overline{P}$的可列可加性。设 $E_n\in\overline{\mathscr{F}}(n=1,2,\cdots)$ 且互不相交，设 $E_n=A_n\cup N_n$，其中

$$A_n\in\mathscr{F},\ N_n\subset M_n\in\mathscr{F},\ P(M_n)=0$$

则

$$\overline{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\overline{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cup N_n)\right)$$

$$=\overline{P}\left((\sum_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\sum_{n=1}^{\infty}N_n)\right)$$

$$=\overline{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)$$

（4）$\overline{P}$是完全测度。

设 $M\subset A\cup N\in\overline{\mathscr{F}}$，其中

$A\in\mathscr{F}$，$P(A)=0$，$N\subset B\in\mathscr{F}$，$P(B)=0$

则

$$M\subset A\cup B\in\mathscr{F},\ P(A\cup B)=0$$

故$M\in\overline{\mathscr{F}}$。

在以下诸引理及定理6中，设P是环$\mathscr{F}$上的测度，P^*是由P引出的外测度，$\mathscr{S}^*$是P^*-可测集的全体，P在$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上的拓展测度仍记为P，此拓展测度的增补测度记为$\overline{P}$，其定义域则记为$\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$。

引理2　P^*-零集都是$\overline{P}$-零集。

证　设 $P^*(A)=0$，根据 $P^*(A)$的定义，对于任何正整数 n，存在$A_{nk}\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots)$，使得$A\subset\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{nk})<\frac{1}{n}$$

令 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{nk}$，则有 $A\subset E\in S(\mathscr{F})$ 且 $P(E)=0$。由于 $\overline{P}$ 是完全测度，故由此有 $\overline{P}(A)=0$。

引理 3 如果 $A\in\mathscr{S}^*$ 且 $P^*(A)<\infty$，则 $A\in\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$ 且 $P^*(A)=\overline{P}(A)$。

证 根据 $P^*(A)$ 的定义，对于任何正整数 n，存在 $A_{nk}\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots)$ 使得 $A\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{nk}$，而且

$$P^*(A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{nk})\leqslant P^*(A)+\frac{1}{n}$$

令 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{nk}$，则 $A\subset E\in\mathscr{S}(\mathscr{F})$，且

$$P^*(A)\leqslant P^*(E)=P(E)\leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{nk}\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(A_{nk})\leqslant P^*(A)+\frac{1}{n}$$

令 $n\to\infty$ 即得 $P^*(A)=P^*(E)=P(E)$。因为 $A\in\mathscr{S}^*$，$E\in\mathscr{S}^*$，故

$$P^*(A)=P^*(E)=P^*(A)+P^*(E-A)$$

由于 $P^*(A)<\infty$，故由上式有 $P^*(E-A)=0$，于是由引理 2 知，$E-A\in\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$ 且为 $\overline{P}$ 零集，又由于 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{F})\subset\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$，于是有

$$A=E-(E-A)\in\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$$

且

$$\overline{P}(A)=\overline{P}(E)-\overline{P}(E-A)$$

$$=\overline{P}(E)=P(E)=P^*(A)$$

引理 4　如果 P 是环 $\mathscr{F}$ 上的 σ–有限测度，则 P^* 是 $\mathscr{S}^*$ 上的 σ–有限测度。

证　由于 $\mathscr{S}^*\subset\mathscr{H}(\mathscr{F})$，故对于每个 $A\in\mathscr{S}^*$，存在 $A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$ 使 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，又因为 P 在 $\mathscr{F}$ 上是 σ–有限的，故对于每个 A_n，存在 $A_{nk}\in\mathscr{F}$，$P(A_{nk})<\infty(k=1,2,\cdots)$，使得 $A_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{nk}$，于是

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{nk},\quad P^*(A_{nk})=P(A_{nk})<\infty$$

即 A 的 P^* 测度是 σ–有限的。

定理 6　设 P 是环 $\mathscr{F}$ 上的 σ–有限测度，则 $\overline{P}$ 与 P^* 恒等，即

$$\overline{P}(A)=P^*(A),\quad A\in\overline{S}(\mathscr{F})=S^*$$

证　先设 $A\in\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$，则 $A=E\cup N$，$\overline{P}(A)=P(E)$，其中 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{F})$，$N\subset M\in\mathscr{S}(\mathscr{F})$，$P(M)=0$。因为 $\mathscr{S}(\mathscr{F})\subset\mathscr{S}^*$，故 $E\in\mathscr{S}^*$，$M\in\mathscr{S}^*$，由于 P^* 是完全测度，故 $N\in\mathscr{S}^*$，于是有 $A\in\mathscr{S}^*$ 且

$$P^*(E)\leqslant P^*(A)\leqslant P(E)+P^*(N)=P^*(E)$$

于是有 $P^*(A)=P^*(E)=P(E)$，从而有 $P^*(A)=\overline{P}(A)$。

现在设 $A\in\mathscr{S}^*$。由引理 4 知，P^* 是 $\mathscr{S}^*$ 上的 σ–有限测度，于是存在 $A_n\in\mathscr{S}^*(n=1,2,\cdots)$，$P^*(A_n)<\infty$，使得 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，令

$$B_1=A_1,\ B_2=A_1^cA_2,\ \cdots$$

$$B_n=A_1^c\cdots A_{n-1}^cA_n$$

则有

$$A=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap A=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cap A$$

由于 $B_n\cap A\in\mathscr{S}^*$ 且 $P^*(B_n\cap A)<\infty$，故由引理3有 $B_n\cap A\in\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$ 且 $P^*(B_n\cap A)=\overline{P}(B_n\cap A)$，于是 $A\in\overline{\mathscr{S}}(\mathscr{F})$ 且

$$P^*(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P^*(B_n\cap A)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P}(B_n\cap A)=\overline{P}(A)$$

习 题 2·3

1. 设 P 是σ-环 $\mathscr{F}$ 上的测度。$\mathscr{F}_1$ 是一切形如 $A\cup N$ 之集组成的类，$\mathscr{F}_2$ 是一切形如 $A-N$ 之集组成的类，$\mathscr{F}_3$ 是一切形如 $A\triangle N$ 之集组成的类，$\mathscr{F}_4$ 是一切形如 $(A-N_1)\cup N_2$ 之集所组成的类，其中 $A\in\mathscr{F}$，N,N_1,N_2 是 $\mathscr{F}$ 中测度为零之集的子集。证明

$$\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\mathscr{F}_3=\mathscr{F}_4$$

2. 设 P 是 σ-环 $\mathscr{F}$ 上的测度，$\overline{\mathscr{F}}$ 为 $\mathscr{F}$ 相对于 P 的完全化，$\overline{P}$ 是 P 的增补，$\mathscr{H}(\mathscr{F})$ 是包含 $\mathscr{F}$ 的最小可传σ-环。P^* 与 P_* 分别为由 P 引出的 $\mathscr{H}(\mathscr{F})$ 上的外测度和内测度（参见习题2.2问题10与12）。证明：

（1）如果 $A\in\overline{\mathscr{F}}$，则 $P_*(A)=P^*(A)=\overline{P}(A)$；

（2）如果 $P_*(A)=P^*(A)<\infty$，则 $A\in\overline{\mathscr{F}}$。

3. 下面的例子表明，在定理4中，为了保证 $S(\mathscr{F})$ 上的拓展测度的唯一性，P 在 $\mathscr{F}$ 上为σ-有限的条件是不可少的。

设 Ω 是有理数的全体。$\mathscr{F}$ 是 Ω 中有限个左开右闭区间的和集 $E=\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k]$ 的全体所组成的类。则 $\mathscr{F}$ 是一个环。

注：Ω 中的左开右闭区间的定义是

$(a,b]=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ a<\omega\leqslant b\}$　a,b 为有理数。

（1）$\mathscr{S}(\mathscr{F})$ 由 Ω 中的一切子集组成；

（2）设 $A\mathscr{S}(\mathscr{F})$，令

$$P(A)=\begin{cases}A\text{中的点的个数，当}A\text{为有限集}\\ \infty\text{，当}A\text{为无限集}\end{cases}$$

则P在$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上为σ-有限，但在$\mathscr{F}$上不是σ-有限；

（3）设$\lambda(A)=2P(A)$，$A\in\mathscr{S}(\mathscr{F})$。则在$\mathscr{F}$上$\lambda=P$，但在$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上此等式不成立；

（4）对限制在$\mathscr{F}$上的测度P按定理3求出拓展测度P^*。试将P^*和$\mathscr{S}(\mathscr{F})$上的P相比较。

§2·4 勒贝格-斯提杰（Lebesgue-Stieltjes）测度

定义1 设$F(x)$是定义在$R=(-\infty,+\infty)$上的实值函数；如果满足条件：

（1）$F(x)$单调增加，即当$x_1<x_2$时，有$F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

（2）$F(x)$右连续，即当$x\in R$时有

$$F(x+0)=\lim_{x'\to x+0}F(x')=F(x)$$

则称$F(x)$是**分布函数**。如果$F(x)$还满足

（3）$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$；

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)<+\infty。$$

则称$F(x)$是**定分布函数**。

满足条件$F(+\infty)=1$的定分布函数称为**概率分布函数**。

设$\mathscr{A}$是所有有限的左开右闭区间$(a,b]$所组成的类。$F(x)$是一给定的分布函数，在$\mathscr{A}$上定义一个集函数P如下：

$$P((a,b])=F(b)-F(a) \tag{4.1}$$

注意，当$a=b$时，区间$(a,b]$理解为空集，因此

$$P(\phi)=0$$

下面我们来讨论集函数P的一些性质。

引理1 设$A_k\in\mathscr{A}(k=1,2,\cdots,n)$且互不相交，如果$A_k\subset$

$A_0(k=1,2,\cdots,n)$，其中 $A_0\in\mathscr{A}$，则

$$\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\leqslant P(A_0)$$

证 令

$$A_k=[a_k,b_k),\quad k=0,1,\cdots,n$$

不失一般性我们可以假定

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$$

由于诸 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$互不相交，故有

$$a_0\leqslant a_1\leqslant b_1\leqslant a_2\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant b_0$$

于是注意到 $F(x)$的单调性有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}P(A_k)&=\sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_k)]\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_k)]+\sum_{k=1}^{n-1}[F(a_{k+1})\\&\quad-F(b_k)]\\&=F(b_n)-F(a_1)\\&\leqslant F(b_0)-F(a_0)\\&=P(A_0)\end{aligned}$$

引理2 设 $A_0=[a_0,\ b_0]$ 是有限闭区间，$A_k=(a_k,\ b_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$是有限开区间，且

$$A_0\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

则

$$F(b_0)-F(a_0)\leqslant\sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_k)]$$

证 只要去掉那些多余的 A_k，并适当改变编号，我们就可以假定：

$$a_1 < a_0 < b_1, \quad a_n < b_0 < b_n$$

$$a_{k+1} < b_k < b_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

于是，注意到 $F(x)$ 的单调性有

$$F(b_0) - F(a_0) \leqslant F(b_n) - F(a_1)$$

$$= F(b_1) - F(a_1) + \sum_{k=1}^{n-1}[F(b_{k+1}) - F(b_k)]$$

$$\leqslant F(b_1) - F(a_1) + \sum_{k=1}^{n-1}[F(b_{k+1}) - F(a_{k+1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[F(b_k) - F(a_k)]$$

引理 3 设 $A_k \in \mathscr{A}(k = 0, 1, \cdots)$，且

$$A_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

则

$$P(A_0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

证 令

$$A_k = (a_k, b_k], \quad k = 0, 1, \cdots$$

若$a_0 = b_0$，引理显然成立．下面考虑 $a_0 < b_0$ 的情形．设 ε 是满足关系式 $\varepsilon < b_0 - a_0$ 的任一正数．由于F右连续，故对于每个$k \geqslant 1$，有 $\varepsilon_k > 0$使

$$F(b_k + \varepsilon_k) - F(b_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

令

$$E_0 = [a_0 + \varepsilon, \; b_0]$$

$$E_k = (a_k, \; b_k + \varepsilon_k), \quad k = 1, 2, \cdots$$

则

$$E_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

于是由有限覆盖定理知，存在 n 使

$$E_0 \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

根据引理2，有

$$F(b_0) - F(a_0+\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{n} [F(b_k+\varepsilon_k) - F(a_k)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [F(b_k+\varepsilon_k) - F(b_k)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} [F(b_k) - F(a_k)]$$

$$< \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

在此不等式中令 $\varepsilon \to 0$，并注意到 F 的右连续性即得

$$F(b_0) - F(a_0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

这就是所要证明的结论。

定理1 $\mathscr{A}$ 上的集函数 P 具有可列可加性。

证 设 $A_k \in \mathscr{A}$ $(k=1,2,\cdots)$，诸 A_k 互不相交，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A \in \mathscr{A}$$

则由引理1有

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant P(A), \quad n=1,2,\cdots$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leqslant P(A)$$

又由引理3有

$$P(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

由以上二式即得

$$P(A) = P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

即 P 在 $\mathscr{A}$ 上具有可列可加性。

设 $\mathscr{F}$ 是由有限个左开右闭的有限区间的和集的全体所组成的环。易知 $\mathscr{F}$ 中的集都可用有限个左开右闭的有限区间的直和表示，即 $\mathscr{F}$ 中的集 A 都可表示为

$$A = \sum_{k=1}^{n} (a_k, b_k] \tag{4.2}$$

我们注意到，对于给定的 A，表达式（4.2）并不是唯一的。例如，设 $A=(0,3]$，则 A 也可以表示为

$$\begin{aligned} A &= (0,1] + (1,3] \\ &= (0,2] + (2,3] \end{aligned} \tag{4.3}$$

引理4 设 $F(x)$ 是一个给定的分布函数，$A \in \mathscr{F}$ 且由（4.2）表示，令

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} [F(b_k) - F(a_k)] \tag{4.4}$$

则由(4.4)式定义的 $\mathscr{F}$ 上的集函数 P 有唯一确定的值。也就是说 $P(A)$ 的值只与 A 有关而与 A 的表达式（4.2）的形式无关。

证 为区别起见，我们改用小写字母 p 来表示由（4.1）式定义的 $\mathscr{A}$ 上的集函数，即当 $A=(a,b]$ 时，

$$p(A) = F(b) - F(a)$$

于是如记$A_k=(a_k,b_k]$，则（4.4）式可写为

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}p(A_k) \tag{4.5}$$

设 $A\in\mathscr{F}$，且

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad A_i\in\mathscr{A} \tag{4.6}$$

$$A=\sum_{j=1}^{m}B_j,\quad B_j\in\mathscr{A} \tag{4.7}$$

是A的相应于（4.2）式的两种表达式，则

$$A_i=A_i\cap\sum_{j=1}^{m}B_j=\sum_{j=1}^{m}A_i\cap B_j$$

显然$\mathscr{A}$对交运算封闭，故 $A_i\cap A_j\in\mathscr{A}$，又 p 显然具有有限可加性，故有

$$p(A_i)=\sum_{j=1}^{m}p(A_i\cap B_j)$$

故

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(A_i\cap B_j) \tag{4.8}$$

同理，当A由（4.7）式表示时，有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{m}p(B_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p(B_j\cap A_i) \tag{4.9}$$

交换求和次序即可看到，（4.8）式与（4.9)式所定义的$P(A)$

是一致的。

例如，设 $A=(0,3]$ 由（4.3）式表示，则

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P((0,1]+(1,3])\\
&=[F(1)-F(0)]+[F(3)-F(1)]\\
&=F(3)-F(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P((0,2]+(2,3])\\
&=[F(2)-F(0)]+[F(3)-F(2)]\\
&=F(3)-F(0)
\end{aligned}
$$

引理 5 对于任意给定的分布函数 $F(x)$，由（4.4）式定义的集函数是环 $\mathscr{F}$ 上的测度。

证 P 的非负性是显然的。又空集 ϕ 可看作是 $(a,a]$，故有

$$P(\phi)=F(a)-F(a)=0$$

P 的有限可加性是显然的。事实上，设

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad A_i\in\mathscr{F}$$

$$A_i=\sum_{j=1}^{n_i}A_{ij},\quad A_{ij}\in\mathscr{A}$$

则

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}A_{ij}$$

于是由（4.5）式有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}p(A_{ij})=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$$

下面证 P 的可列可加性。设

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$$

$$A_i=\sum_{j=1}^{n_i}A_{ij},\quad A_{ij}\in\mathscr{A}$$

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}B_k,\quad B_k\in\mathscr{A}$$

则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}p(B_k) \tag{4.10}$$

而

$$B_k=B_k\cap\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\sum_{i=1}^{\infty}B_k\cap A_i$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}B_k\cap\sum_{j=1}^{n_i}A_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}B_k\cap A_{ij}$$

由于 $B_k\cap A_{ij}\in\mathscr{A}$，故由定理1有

$$p(B_k)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}p(B_k\cap A_{ij}) \tag{4.11}$$

由（4.10）及（4.11）并再次利用引理1，得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}p(B_k\cap A_{ij})$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{\infty}p(B_k\cap A_{ij})$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}p(A_{ij})$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}p(A_i)$$

于是就证明了 P 的可列可加性，因而证明了 P 是 $\mathscr{F}$ 上的测度。

定理2 设$R=(-\infty,+\infty)$，$\mathscr{B}$是R中波莱尔集的全体，

则对于任意给定的分布函数$F(x)$，在$\mathscr{B}$上存在唯一的测度P，使得

$$P((a,b])=F(b)-F(a) \tag{4.12}$$

注：这个测度与$F(x)$有关，如要强调这种关系，可将它记为P_F

证 根据引理4与引理5，在环$\mathscr{F}$上存在由（4.4）式定义的测度，这个测度当然满足条件（4.12）。另一方面，如果环$\mathscr{F}$上的测度满足（4.12），则由有限可加性知，$\mathscr{F}$上的这个测度必须由（4.4）式定义。于是就证明了在环$\mathscr{F}$上存在唯一的测度P使（4.12）式成立。显然，由（4.4）式定义的$\mathscr{F}$上的测度是有限测度，因此根据上节定理4，$\mathscr{F}$上的这个测度P可唯一地拓展到$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{F})$上去。这个拓展测度就满足定理中的要求。

定义2 设$F(x)$是任一分布函数，P是由（4.4）式定义的环$\mathscr{F}$上的测度，则称P由$\mathscr{F}$拓展到$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{F})$的拓展测度为勒贝格-斯提杰测度（或由$F(x)$引出的勒贝格-斯提杰测度）。

上节的定理3表明，$\mathscr{F}$上的这个测度P实际上可以拓展到比$\sigma(\mathscr{F})$更大的σ-环$\mathscr{S}^*$上去。我们也称P由$\mathscr{F}$拓展到$\mathscr{S}^*$的拓展测度为勒贝格-斯提杰测度。

如果$F(x)\equiv x$，则由它引出的勒贝格-斯提杰测度就是通常的勒贝格测度，$\mathscr{S}^*$中的集就称为勒贝格可测集。因为$\mathscr{B}\subset\mathscr{S}^*$，所以波莱尔可测集都是勒贝格可测集。勒贝格可测集的全体所成的类通常用$\mathscr{L}$表示，勒贝格测度则用m表示。

综上所述，勒贝格-斯提杰测度是定义在$\mathscr{B}$上的测度，由于它满足条件（4.12），故它在任何有限区间上取有限值。下面的定理表明，这正是勒贝格-斯提杰测度的本质特征。

定理 3 设 P 是 $\mathscr{B}$ 上的测度，且对于任何有限区间 $[a,b]$ 有

$$P([a,b])<+\infty \tag{4.13}$$

则存在分布函数 $F(x)$，使得

$$P((a,b])=F(b)-F(a) \tag{4.14}$$

且如不计一个常数，则使上式成立的分布函数是唯一的。

使（4.14）式成立的分布函数称为 P **所确定的分布函数**（**或 P 的分布函数**）。

证 任取定一个常数 k，令

$$F(x)=\begin{cases}P((k,x]), & \text{当} x\geqslant k\\ -P((x,k]), & \text{当} x<k\end{cases}$$

由于 P 在有限区间上取有限值，故 $F(x)$ 是 R 上的实值函数，显然 $F(x)$ 单调增加。下面证明：

（1）$F(x)$ 右连续。

设 $x\geqslant k$，$\{x_n\}$ 是趋向于 x 的任一递减数列，则 $\{(k,x_n]\}$ 是单调减少的区间列，且

$$\lim_{n\to\infty}(k,x_n]=(k,x]$$

于是根据测度的下连续性有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F(x_n)&=\lim_{n\to\infty}P((k,x_n])\\&=P((k,x])\\&=F(x)\end{aligned} \tag{4.15}$$

因为 $F(x)$ 单调，故存在右极限

$$F(x+0)=\lim_{x'\to x+0}F(x') \tag{4.16}$$

由（4.15）与（4.16）可知，$F(x+0)=F(x)$，故 F 在 x 处右连续。

同理可证 $x<k$ 的情况。

（2）设$a<k, b\geqslant k$（其它情况与此类似），则

$$
\begin{aligned}
& F(b)-F(a) \\
& =P((k,b])-[-P((a,k])) \\
& =P((k,b])+P((a,k]) \\
& =P((a,k]+(k,b]) \\
& =P((a,b])
\end{aligned}
$$

故（4.14）式成立。

（3）设$F_1(x)$与$F_2(x)$是使（4.14）式成立的两个分布函数，则当$x\geqslant a$时，

$$
\begin{aligned}
F_1(x)-F_1(a)=F_2(x)-F_2(a) \\
=P((a,x])
\end{aligned}
$$

即

$$F_1(x)=F_2(x)+F_1(a)-F_2(a)$$

当$x<a$时，

$$
\begin{aligned}
F_1(a)-F_1(x)=F_2(a)-F_2(x) \\
=P((x,a])
\end{aligned}
$$

即

$$F_1(x)=F_2(x)+F_1(a)-F_2(a)$$

于是对一切x有

$$F_1(x)=F_2(x)+C$$

其中$C=F_1(a)-F_2(a)$为常数。

推论 定义在$\mathscr{B}$上且满足条件（4.13）的测度P是勒贝格-斯提杰测度，它可由其分布函数所引出。

因此$\mathscr{B}$上的测度P是勒贝格-斯提杰测度的充要条件是它满足条件（4.13）。

注：如果P是$\mathscr{B}$上的有限测度，则

$$F(x)=P((-\infty,x]) \tag{4.17}$$

是P的一个分布函数。

事实上，当P全有限时，由（4.17）定义的$F(x)$是R上的实值函数。仿照上述定理中的讨论可以证明$F(x)$是非负单增的右连续函数并且满足条件（4.14），因而它是P的一个分布函数。

综上所述，我们得到如下结论：如果把相差一个常数的分布函数看成“相等”，则（4.14）式建立了R上的分布函数与$\mathscr{B}$上的满足条件（4.13）的测度（即勒贝格-斯提杰测度）之间的一一对应。

习 题 2·4

1．设

$$F(x)=\begin{cases}0, & 当x<0\\ \frac{3}{2}x, & 当0\leqslant x\leqslant 2\\ 3, & 当2<x<3\\ 4, & 当x\geqslant 3\end{cases}$$

P是由$F(x)$引出的勒贝格-斯提杰测度，求下列集的测度：

（1）$[-1, 0]$；

（2）$[-1, 1]$；

（3）$[1, 2]$；

（4）$[2, 3)$；

（5）$[2, 3]\cup\{1\}$；

（6）$\{3\}\cup(2, 4]$；

（7）$\{x \mid |x|+2x^2>1\}$；

（8）$(-\infty, +\infty)$。

2．设

$$F(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}, & n\leqslant x<n+1,\ n=0,1,2,\cdots\\ 0, & x<0\end{cases}$$

P是由$F(x)$引出的勒贝格-斯提杰测度。求单元集$\{n\}$的测度，其中n为任意整数。

3、设P是分布函数$F(x)$引出的勒贝格-斯提杰测度，证明

（1）$P(\{x\})=F(x)-F(x-0)$；

（2）当且仅当$P(\{x\})=0$时，F在x处连续；

（3）$P((a,b))=F(b-0)-F(a)$；

（4）$P([a,b])=F(b)-F(a-0)$；

（5）$P([a,b))=F(b-0)-F(a-0)$；

（6）$P((-\infty, x])=F(x)-F(-\infty)$；

（7）$P((-\infty, x))=F(x-0)-F(-\infty)$；

（8）$P((x,\infty))=F(\infty)-F(x)$；

（9）$P([x,\infty))=F(\infty)-F(x-0)$；

（10）$P(R)=F(\infty)-F(-\infty)$。

4. 设P_1与P_2是$\mathscr{B}$上的两个有限测度。如果它们在$(a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$[a,b]$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$，$[a,\infty)$，(a,∞)这八种类型之一的所有端点为有理数的区间上相等，则它们在$\mathscr{B}$上相等。

5. 设$F(x)$是$(-\infty,+\infty)$上单调增加的非负函数（未必右连续），在$\mathscr{A}$（定义见引理1）上定义集函数如下：

$$P((a,b])=F(b)-F(a)$$

（1）P是否具有可加性？

（2）P是否具有可列可加性？

6. 设$F(x)$是$(-\infty,+\infty)$上单调增加的非负左连续函数，$\mathscr{A}$是所有有限的左闭右开区间$[a,b)$的全体所组成的类，在$\mathscr{A}$上定义集函数P如下：

$$P([a,b))=F(b)-F(a)$$

则P具有可列可加性。

第三章 可 测 函 数

§3·1 映　　射

定义1　设 A、B 是两个非空集，如果存在一个法则 f，使得 A 中的每一个元素 a，都有 B 中唯一的一个元素 b 与之对应，就称 f 是一个从 A 到 B 中的映射，并记为

$$f: A\to B$$

如果元素 a 对应于元素 b，则 b 叫做 a 的象或值，而 a 叫做 b 的原象，记为 $b=f(a)$。

当 f 是从 A 到 B 的映射时，称 A 为映射 f 的定义域，而把 A 的所有元素的象所组成的集称为 f 的值域，记为 $f(A)$，即

$$f(A)=\{b\,|\,b=f(a),\ a\in A\}$$

注意，$f(a)$ 是 B 中的一个元素，而 $f(A)$ 则是 B 中的一个子集，即 $f(A)\subset B$，二者不可混淆。

如果 B 是实数或广义实数的集，则从 A 到 B 的映射称为定义在 A 上的函数。

定义2　设有两个映射 f 与 g，如果 f 的定义域与 g 的定义域都是同一集 A，且对于所有的 $a\in A$，都有 $f(a)=g(a)$，则称 f 与 g 相等，记为 $f=g$。

如果映射 f：$A\to B$，对于任意的 $a\in A$，都有 $f(a)=b_0$，这里 b_0 是 B 中的一个固定元素，则称 f 为以 b_0 为值的常值映射。

若 $A=B$，且对于所有的 $a\in A$，$f(a)=a$，则称 f 为 A 的恒等映射，用 I_A 来表示。

定义 3 设f：$A\to B$，g：$B\to C$是两个映射，用

$$h(a)=g(f(a)) \quad (a\in A)$$

定义的映射

$$h: A\to C$$

称为 f 与 g 的复合映射，记为$h=f\circ g$。

定义 4 设 f 、g 是定义在集A上的两个广义实值函数，则函数

$$h(\omega)=\begin{cases} 0, 当f(\omega)=\pm\infty, 而g(\omega)=\mp\infty & (\omega\in A) \\ f(\omega)+g(\omega), 对于其它情况 \end{cases}$$

$$s(\omega)=\begin{cases} 0, \ 当f(\omega)=g(\omega)=\pm\infty \\ f(\omega)-g(\omega), 对于其它情况 \end{cases}$$

分别称为 f 与 g 的和与差，并记为$f\dotplus g$与$f-g$。

两个函数的积、商以及函数的绝对值，函数列的收敛等概念都可类似地定义。

定义 5 设Ω是一个空间，$A\subset\Omega$，则称函数

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases} 1, & 当\omega\in A \\ 0, & 当\omega\notin A \end{cases}$$

为集A的特征函数。

显然子集A完全由它的特征函数所确定，也就是说，$A=B$的充要条件是

$$\chi_A(\omega)\equiv\chi_B(\omega)$$

特征函数与集之间有下面一些常见的重要关系：

1°. $A=\Omega$ 等价于$\chi_A(\omega)\equiv 1$；

$A=\phi$ 等价于$\chi_A(\omega)\equiv 0$。

2°. $A\subset B$ 等价于$\chi_A(\omega)\leqslant\chi_B(\omega)$；

$A=B$ 等价于$\chi_A(\omega)=\chi_B(\omega)$。

3°. $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$；

$$\chi_{A+B}=\chi_A+\chi_B;$$

4°. $\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B$.

定义 6 设 f: $A\to B$，如果 $f(A)=B$，则称 f 为从 A 到 B 上的映射（或称完全映射）.

如果当 $a\neq a'$ 时恒有 $f(a)\neq f(a')$，则称 f 为单调映射.

如果映象 f: $A\to B$ 是由 A 到 B 上的单调映射，则称 f 为 A 到 B 的一一映射.

定义 7 设 f: $\Omega\to\overline{\Omega}$ 是从 Ω 到 $\overline{\Omega}$ 的一个映射，$\overline{A}\subset\overline{\Omega}$，则称 Ω 中的集

$$\{\omega\mid f(\omega)\in\overline{A}\}$$

为集 $\overline{A}$ 关于 f 的原象，记为 $f^{-1}(\overline{A})$。

设 $A\subset\Omega$，f 是定义在 A 上的函数，$[a,\ b]$ 是一个区间，则记

$$\{\omega\mid a\leqslant f(\omega)\leqslant b,\ \omega\in A\}=A\ (a\leqslant f\leqslant b)$$

如果 $A=\Omega$，则上述集也简记为 $\{a\leqslant f\leqslant b\}$。

$A(f\leqslant a)$，$\{f\leqslant a\}$ 等记号的意义可以类似地理解.

定义 8 设 f: $\Omega\to\overline{\Omega}$ 是从 Ω 到 $\overline{\Omega}$ 的一个映射，$\overline{\mathscr{F}}$ 是 $\overline{\Omega}$ 中的集类，则称 Ω 中的集类

$$\{f^{-1}(\overline{A})\mid\overline{A}\in\overline{\mathscr{F}}\}$$

为集类 $\overline{\mathscr{F}}$ 关于 f 的原象，记为 $f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$。

定理 1 原象具有下列性质：

(1) $$f^{-1}(\overline{A}\cup\overline{B})=f^{-1}(\overline{A})\cup f^{-1}(\overline{B}) \tag{1.1}$$

一般有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(\overline{A}_n) \tag{1.2}$$

证 $\omega\in f^{-1}(\overline{A}\cup\overline{B})\Longleftrightarrow f(\omega)\in\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\Longleftrightarrow f(\omega)\in\overline{A}\text{或}f(\omega)\in\overline{B}$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \text{或} \omega \in f^{-1}(\overline{B})$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \cup f^{-1}(\overline{B})$$

故 (1.1) 式成立。同理可证 (1.2) 式。

(2) $f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B})$ (1.3)

一般有

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overline{A}_n) \tag{1.4}$$

证 $\omega \in f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}) \Longleftrightarrow f(\omega) \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$$\Longleftrightarrow f(\omega) \in \overline{A} \text{ 且 } f(\omega) \in \overline{B}$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \text{且} \omega \in f^{-1}(\overline{B})$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B})$$

故 (1.3) 式成立。同理可证 (1.4) 式。

(3) $f^{-1}(\overline{A} + \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) + f^{-1}(\overline{B})$ (1.5)

一般有

$$f^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overline{A}_n) \tag{1.6}$$

证 由 (1.1) 式有

$$f^{-1}(\overline{A} + \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) \cup f^{-1}(\overline{B})$$

由 (1.3) 有

$$f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

故 (1.5) 式成立。同理可证 (1.6) 式。

(4) $f^{-1}(\overline{A}') = [f^{-1}(\overline{A})]'$ (1.7)

证 由 (1.5) 有

$$f^{-1}(\overline{A}) + f^{-1}(\overline{A}') = f^{-1}(A + A') = f^{-1}(\Omega) = \Omega$$

故 (1.7) 式成立。

(5) $f^{-1}(\overline{A} - \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A}) - f^{-1}(\overline{B})$ (1.8)

证 $f^{-1}(\overline{A} - \overline{B}) = f^{-1}(\overline{A} \cap \overline{B}')$

$$= f^{-1}(\overline{A}) \cap f^{-1}(\overline{B}')$$

$$= f^{-1}(\overline{A}) \cap [f^{-1}(\overline{B})]'$$
$$= f^{-1}(\overline{A}) - f^{-1}(\overline{B})$$

定理 2 设 f: $\Omega \to \overline{\Omega}$ 是从 Ω 到 $\overline{\Omega}$ 的映射. $\overline{\mathscr{F}}_1$, $\overline{\mathscr{F}}_2$ 与 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 $\overline{\Omega}$ 中的集类.

（1）如果 $\overline{\mathscr{F}}_1 \subset \overline{\mathscr{F}}_2$, 则 $f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}_1) \subset f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}_2)$;

（2）如果 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 σ-环（代数），则 $f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$ 也是 σ-环（代数）.

证 （1）是显然的. （2）可直接由（1.2），（1.7）与（1.8）式推出，例如，设 $A_n \in f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$ 则存在 $\overline{A}_n \in \overline{\mathscr{F}}$, 使

$$A_n = f^{-1}(\overline{A}_n) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

由于 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 σ-环，故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \in \overline{\mathscr{F}}$, 于是由（1.2）式有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overline{A}_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) \in f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$$

故 $f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$ 对可列和运算是封闭的。同理可证 $f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$ 对差运算的封闭性。

定理 3 设 f: $\Omega \to \overline{\Omega}$ 是从 Ω 到 $\overline{\Omega}$ 的映射。$\overline{\mathscr{F}}$ 是 $\overline{\Omega}$ 中的集类，则

$$f^{-1}(\sigma(\overline{\mathscr{F}})) = \sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})) \qquad (1.9)$$

$$f^{-1}(\mathscr{S}(\overline{\mathscr{F}})) = \mathscr{S}(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})) \qquad (1.10)$$

证 因为 $\overline{\mathscr{F}} \subset \sigma(\overline{\mathscr{F}})$ 故

$$f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}) \subset f^{-1}(\sigma(\overline{\mathscr{F}}))$$

由定理 2 知，$f^{-1}(\sigma(\overline{\mathscr{F}}))$ 是 σ-代数，故有

$$\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})) \subset f^{-1}(\sigma(\overline{\mathscr{F}})) \qquad (1.11)$$

下面证明相反的包含关系：

$$f^{-1}(\sigma(\overline{\mathscr{F}})) \subset \sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})) \qquad (1.12)$$

令

$$\overline{\mathscr{A}}=\{\overline{A}\mid\overline{A}\subset\overline{\Omega},\ f^{-1}(\overline{A})\in\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))\}$$

下面证明$\overline{\mathscr{A}}$是σ-代数：

1°．设$\overline{A}\in\overline{\mathscr{A}}$即

$$f^{-1}(\overline{A})\in\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))$$

由（1.7）式及$\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))$为$\sigma$-代数的条件有

$$f^{-1}(\overline{A}')=[f^{-1}(\overline{A})]'\in\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))$$

故$\overline{A}'\in\overline{\mathscr{A}}$，即$\overline{\mathscr{A}}$对补运算封闭．

2°．设$\overline{A}_n\in\overline{\mathscr{A}}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，即

$$f^{-1}(\overline{A}_n)\in\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))$$

于是

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(\overline{A}_n)\in\sigma[f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})]$$

故$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\in\overline{\mathscr{A}}$，即$\overline{\mathscr{A}}$对可列和运算封闭．

由1°与2°知，$\overline{\mathscr{A}}$是σ-代数．现在回到（1.12）式的证明．

设$\overline{A}\in\overline{\mathscr{F}}$，则

$$f^{-1}(\overline{A})\in f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})\subset\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))$$

故$\overline{A}\in\overline{\mathscr{A}}$，即$\overline{\mathscr{F}}\subset\overline{\mathscr{A}}$．因为$\overline{\mathscr{A}}$是$\sigma$-代数，故$\sigma(\overline{\mathscr{F}})\subset\overline{\mathscr{A}}$，即对于任何 $\overline{A}\in\sigma(\overline{\mathscr{F}})$，有

$$f^{-1}(\overline{A})\in\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))$$

即

$$f^{-1}(\sigma(\overline{\mathscr{F}}))\subset\sigma(f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}))$$

（1.9）式证毕．同理可证（1.10）．

习　题　3·1

1．设 f: $A\to B$是从集A到集B中的映射，T是任一指标，$B_t\subset B$，

$(t\in T)$，证明

(1) $f^{-1}(\bigcup_{t\in T} B_t)=\bigcup_{t\in T} f^{-1}(B_t)$；

(2) $f^{-1}(\bigcap_{t\in T} B_t)=\bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t)$。

2. 设 f: $A\to B$是从集A到集B中的映射。下列各式是否成立？如不成立应如何修改：

(1) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$；

(2) $f(A_1+A_2)=f(A_1)+f(A_2)$；

(3) $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$；

(4) $f(A_1-A_2)=f(A_1)-f(A_2)$；

(5) $f(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}f(A_n)$；

(6) $f^{-1}(\overline{\lim_{n\to\infty}}B_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}f^{-1}(B_n)$；

(7) $f(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}f(A_n)$；

(8) $f^{-1}(\underline{\lim_{n\to\infty}}B_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}f^{-1}(B_n)$。

3. 证明 (1.10) 式。

4. 设 f: $\Omega\to\overline{\Omega}$是从$\Omega$到$\overline{\Omega}$中的映射。$\overline{\mathscr{F}}_1$、$\overline{\mathscr{F}}_2$与$\overline{\mathscr{F}}$是$\overline{\Omega}$中的集类。

(1) 如果$f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}_1)\subset f^{-1}(\overline{\mathscr{F}}_2)$，是否一定有$\overline{\mathscr{F}}_1\subset\overline{\mathscr{F}}_2$？

(2) 如果$f^{-1}(\overline{\mathscr{F}})$是$\sigma$-代数，是否$\overline{\mathscr{F}}$一定是$\sigma$-代数？

5. 设$\{A_n\}$是一列集。证明：

(1) $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(\omega)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(\omega)$；

(2) $\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(\omega)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(\omega)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(\omega)$存在，而且当极限存在时，有

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(\omega)$$

6. 设 $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$，证明

$$\chi_A(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(\omega)$$

7. 设f: $\Omega \to \overline{\Omega}$是从$\Omega$到$\overline{\Omega}$的映射，下面的关系是否成立：

$A = f^{-1}(\overline{A}) \Longleftrightarrow f(A) = \overline{A}$

§3·2 可测函数的定义及其基本性质

定义1 设$\mathscr{F}$是空间Ω的某些子集组成的σ-代数，P是$\mathscr{F}$上的测度，如果把Ω与$\mathscr{F}$合在一起来考虑，就称它为**可测空间**，记为$(\Omega, \mathscr{F})$。$\mathscr{F}$中的元素（集）称为$\mathscr{F}$-可测集（简称可测集）。

如果把Ω、$\mathscr{F}$与P合在一起来考虑，就称它为**测度空间**，记为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$。

如果测度P是有限（σ-有限）的，则称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是**有限（σ-有限）测度空间**；如果P是完全测度，则称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为**完全测度空间**；如果P是$\mathscr{F}$上的概率测度，则称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为**概率空间**。

定义2 设$(\Omega, \mathscr{F})$是给定的可测空间，f是定义在Ω上的广义实值函数，如果对于任何实数a都有

$$\{\omega \mid f(\omega) \leqslant a\} \in \mathscr{F} \tag{2.1}$$

则称f是$(\Omega, \mathscr{F})$上的**可测函数**，或$\mathscr{F}$**可测函数**。

特别，$(R, \mathscr{B})$称为**波莱尔可测空间**，其上的实值可测函数称为**波莱尔可测函数**。$(R, \mathscr{L})$与$(R, \mathscr{L}, m)$分别称为**勒贝格可测空间和勒贝格测度空间**，其上的可测函数称为**勒贝格可测函数**。

如果$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，则定义在Ω上的实值可测函数也称为**随机变量**。

今后当我们提到若干个可测函数时，如没有特别的说明，则总是假定它们是同一可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的可测函数。

定义 3 设$(\Omega, \mathscr{F})$是可测空间，$A\in\mathscr{F}$，$f(\omega)$是定义在A上的广义实值函数，如果对于任何实数a，都有

$$A(f\leqslant a)\in\mathscr{F} \tag{2.2}$$

则称f是A上的**可测函数**，也称f在A上可测。

定义 2 就是本定义中$A=\Omega$的情况。

例 1 设$\mathscr{F}$为Ω的一切子集所成的类，则定义在Ω上的任何广义实质函数都是可测函数。

例 2 对于任何可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$，常值函数$f(\omega)\equiv a$是可测函数。

例 3 设$A\subset\Omega$，则A的特征函数$\chi_A(\omega)$可测的充要条件是$A\in\mathscr{F}$。

证 这是因为

$$\{\omega \mid \chi_A(\omega)\leqslant a\}=\begin{cases}\phi, & 当a<0\\ A', & 当0\leqslant a<1\\ \Omega, & 当a\geqslant 1\end{cases}$$

例 4 设$\Omega=R$，$\mathscr{F}_1=\{\phi,\Omega\}$，$\mathscr{F}_2=\mathscr{B}$，$f(\omega)=\chi_{[0,1]}(\omega)$。易知$f$为$\mathscr{F}_2$-可测，但不是$\mathscr{F}_1$-可测。

一般地说，设$\mathscr{F}_1$与$\mathscr{F}_2$是同一空间Ω的某些子集所组成的两个σ-代数，如果$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$则$\mathscr{F}_1$-可测的函数必定$\mathscr{F}_2$-可测，而反之则不成立。

例如，由于$\mathscr{B}\subset\mathscr{L}$，故波莱尔可测函数一定是勒贝格可测函数，而勒贝格可测函数却未必是波莱尔可测函数。

定理 1 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，f是定义在Ω上的实值函数，则f可测的充要条件是对任意的$B\in\mathscr{B}$，有

$$f^{-1}(B)\in\mathscr{F} \tag{2.3}$$

证 充分性：设(2.3)式对任何$B\in\mathscr{B}$都成立，在(2.3)中取$B=(-\infty,a]$，即得(2.1)。

必要性：令

$$\mathscr{A}=\{(a,b]\,|-\infty<a\leqslant b<+\infty\}$$

因为

$$f^{-1}((a,\ b])=f^{-1}((-\infty,\ b]-(-\infty,\ a])$$
$$=f^{-1}((-\infty,b])-f^{-1}((-\infty,a])\in\mathscr{F}$$

故$f^{-1}(\mathscr{A})\subset\mathscr{F}$。因为$\mathscr{F}$是$\sigma$-代数，故$\sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))\subset\mathscr{F}$。但$\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{B}$，由上节定理3有

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))=f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))=f^{-1}(\mathscr{B})$$

故$f^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{F}$，即对任意的$B\in\mathscr{B}$有$f^{-1}(B)\in\mathscr{F}$。

定义4 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$是两个可测空间，$f:\Omega_1\to\Omega_2$是从Ω_1到Ω_2的映射，如果对于每个$A\in\mathscr{F}_2$有$f^{-1}(A)\in\mathscr{F}_1$，则称$f$是从$(\Omega_1,\ \mathscr{F}_1)$到$(\Omega_2,\ \mathscr{F}_2)$的**可测映射**，记为

$$f:\ (\Omega_1,\ \mathscr{F}_1)\to(\Omega_2,\ \mathscr{F}_2)$$

由定理1知，$(\Omega,\mathscr{F})$上的实值可测函数就是从$(\Omega,\ \mathscr{F})$到波莱尔可测空间$(R,\ \mathscr{B})$的可测映射。

推论 设f是$(\Omega,\ \mathscr{F})$上的实值可测函数，g是$(R,\mathscr{B})$上的波莱尔可测函数，则复合函数$g\circ f$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的可测函数。

证 对于任意的$B\in\mathscr{B}$有

$$\{\omega|g(f(\omega))\in B\}=\{\omega|f(\omega)\in g^{-1}(B)\}\in\mathscr{F}\tag{2.4}$$

这里由于g波莱尔可测，故$g^{-1}(B)\in\mathscr{B}$，于是根据（2.3）式即得（2.4）式。

定理2 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，f是Ω上的广义实值函数，则f可测的充要条件是对任何$B\in\mathscr{B}$有

$$f^{-1}(B)\in\mathscr{F}\tag{2.5}$$

且

$$f^{-1}(\{-\infty\})=\{\omega|f(\omega)=-\infty\}\in\mathscr{F}\tag{2.6}$$

$$f^{-1}(\{+\infty\})=\{\omega|f(\omega)=+\infty\}\in\mathscr{F}\tag{2.7}$$

证 充分性：设 a 是任意实数，则

$$\{\omega|f(\omega)\leqslant a\}=\{\omega|f(\omega)=-\infty\}+\{\omega|-\infty<f(\omega)\leqslant a\}$$
$$=f^{-1}(\{-\infty\})+f^{-1}((-\infty,a])\in\mathscr{F}$$

必要性：设 $f(\omega)$ 可测，则

$$f^{-1}(\{-\infty\})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega|f(\omega)\leqslant -n\}\in\mathscr{F}$$
$$f^{-1}(\{+\infty\})=\Omega-\{\omega|f(\omega)<+\infty\}$$
$$=\Omega-\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega|f(\omega)\leqslant n\}\in\mathscr{F}$$

(2.5) 式的证明同定理 1 .

设 $\overline{R}$ 是广义实数集，令

$$\widehat{\mathscr{B}}=\{A|A\in\mathscr{B},\ \text{或}A=E\cup\{+\infty\}$$
$$\text{或}\quad A=E\cup\{-\infty\},\ \text{其中}E\in\mathscr{B}$$

易知 $\widehat{\mathscr{B}}$ 是 $\overline{R}$ 中的 σ-代数. 我们称 $\widehat{\mathscr{B}}$ 中的集为**广义波莱尔集**，$(\overline{R},\widehat{\mathscr{B}})$ 则称为**广义波莱尔可测空间**.

由定理 2 知，$(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义实值可测函数就是从 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(\overline{R},\widehat{\mathscr{B}})$ 的可测映射.

显然，以上定理可推广如下：设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$A\in\mathscr{F}$，f 是定义在 A 上的广义实值函数，则 f 在 A 上可测的充要条件是

$$A(f=-\infty)\in\mathscr{F},\ A(f=+\infty)\in\mathscr{F}$$

且对于任何 $B\in\mathscr{B}$

$$A(f\in B)\in\mathscr{F} \tag{2.8}$$

推论 设 f 是 A 上的广义实值可测函数，则对于任何广义实数 a，$A(f=a)\in\mathscr{F}$.

由以上定理 2 的推广可知，A 上的广义实值可测函数就是从 $(A,A\cap\mathscr{F})$ 到 $(\overline{R},\widehat{\mathscr{B}})$ 的可测映射.

定理 3 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$A\in\mathscr{F}$，f 是定义在

A上的广义实值函数，则 f 在 A 上可测的充要条件是下列条件之一满足：

1°. 对任何实数 a，$A(f<a)\in\mathscr{F}$；

2°. 对任何实数 a，$A(f\geqslant a)\in\mathscr{F}$；

3°. 对任何实数 a，$A(f>a)\in\mathscr{F}$。

证 必要性可直接由（2.8）式推出，下面证明充分性。

（1）由于

$$A(f\leqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}A\left(f<a+\frac{1}{n}\right)$$

故如果1°成立，则$A(f<a+\frac{1}{n})\in\mathscr{F}$，因而$A(f\leqslant a)\in\mathscr{F}$，即 f 可测。

（2）由于

$$A(f<a)=A-A(f\geqslant a)$$

故由2°可推出1°，因而推 f 的可测性。

（3）由于

$$A(f\geqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}A\left(f>a-\frac{1}{n}\right)$$

故由3°可推出2°，因而推出 f 的可测性。

定理 4 设$(\Omega,\mathscr{F})$是一可测空间，$A\in\mathscr{F}$，f 是定义在 A 上的可测函数。如果$E\in\mathscr{F}$，且 $E\subset A$，则 f 作为 E 上的函数时，它是 E 上的可测函数。

证 对于任何实数 a，由于

$$E(f\leqslant a)=A(f\leqslant a)\cap E$$

而$A(f\leqslant a)$和 E 都是可测集，故 $E(f\leqslant a)$ 是可测集，即 f 作为 E 上的函数时，它是 E 上的可测函数。

定理 5 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，$A\subset\Omega$，$f(\omega)$是定义在 A 上的广义实值函数，而

$$A=\bigcup_k A_k \tag{2.9}$$

如果 f 在每个A_k上可测，则 f 在 A 上也可测。

注：记号$\bigcup_k$表示对有限项或可列项求和，于是（2.9）式表示A是有限个或可列个集 A_k的和集，符号$\sum_k$有类似的意义。

证 这是因为对于任何实数 a，有

$$A(f\leqslant a)=\bigcup_k A_k(f\leqslant a)$$

定理 6 设$f(\omega)$是定义在A上的可测函数，k是任意一个实数，则下列函数都是可测函数：

（1）$f(\omega)+k$；　　（2）$kf(\omega)$；

（3）$|f(\omega)|$；　　（4）$f^2(\omega)$；

（5）$\dfrac{1}{f(\omega)}$（设$f(\omega)\neq 0$）。

证 （1）由

$$A(f+k\leqslant a)=A(f\leqslant a-k)$$

即得$f(\omega)+k$ 的可测性。

（2）当 $k=0$时，$kf(\omega)$恒取 0 值，故它是可测函数。当$k\neq 0$时，由

$$A(kf\leqslant a)=\begin{cases}A\left(f\leqslant\dfrac{a}{k}\right), & \text{当}k>0\\ A\left(f\geqslant\dfrac{a}{k}\right), & \text{当}k<0\end{cases}$$

即得$kf(\omega)$的可测性。

（3）从

$$A(|f|\leqslant a)=\begin{cases}\phi, & \text{当}a<0\\ A(f\leqslant a)\cap A(f\geqslant -a), & \text{当 }a\geqslant 0\end{cases}$$

知$|f(\omega)|$是一可测函数。

（4）从

$$A(f^2 \leqslant a) = \begin{cases} \phi, & \text{当} a < 0 \\ A(|f| \leqslant \sqrt{a}), & \text{当} a > 0 \end{cases}$$

知 $f^2(\omega)$ 是一可测函数。

（5）因 $f(\omega) \neq 0$，故

$$A\left(\frac{1}{f} \leqslant a\right) = \begin{cases} A(f < 0), & \text{当} a = 0 \\ A(f < 0) \cap A\left(f \geqslant \frac{1}{a}\right), & \text{当} a < 0 \\ A(f < 0) + A(f > 0) \cap A\left(f \geqslant \frac{1}{a}\right), & \text{当} a > 0 \end{cases}$$

由此可知$f(\omega)$是一可测函数。

引理1 设$f(\omega)$与$g(\omega)$是定义在A上的两个可测函数，则$A(f>g)$是一可测集。

证 设有理数的全体是

r_1，r_2，r_3，…

根据有理数的稠密性有

$$A(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(f > r_k) \cap A(g < r_k)$$

由定理3知，$A(f>r_k)$与$A(g<r_k)$ $(k=1,2,\cdots)$都是可测集，故$A(f>g)$是可测集。

定理7 设 $f(\omega)$ 与 $g(\omega)$ 是定义在A上的两个可测函数，则下列函数都是A上的可测函数：

（1）$f(\omega)-g(\omega)$；　　（2）$f(\omega)+g(\omega)$；

（3）$f(\omega)\cdot g(\omega)$；　　（4）$\dfrac{f(\omega)}{g(\omega)}$（设$g(\omega)\neq 0$）；

（5）$\max(f(\omega), g(\omega))$，$\min(f(\omega), g(\omega))$。

证 （1）先就 f、g 均为实值函数的情况来证明。因为根据定理6，对于任意实数a，$a+g(\omega)$是可测的，故由引理1，$A(f>a+g)$是一可测集，于是由

$$A(f-g>a)=A(f>a+g)$$

及定理3即可推出$f-g$可测性。

在$f(\omega)$，$g(\omega)$为广义实值函数的情况，令

$$E_{11}=A(f=-\infty,\ g=-\infty),E_{12}=A(f=-\infty,g=+\infty)$$

$$E_{21}=A(f=+\infty,\ g=-\infty),E_{22}=A(f=+\infty,g=+\infty)$$

$$E=E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}$$

则在$A-E$上f、g均取有限值且可测，故$f-g$在$A-E$上可测，在E上有

$$f(\omega)-g(\omega)=\begin{cases}0, & \text{当}\omega\in E_{11}\\ -\infty, & \text{当}\omega\in E_{12}\\ +\infty, & \text{当}\omega\in E_{21}\\ 0, & \text{当}\omega\in E_{22}\end{cases}$$

由于E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22}都是可测集，故$f-g$是E上的可测函数，于是$f-g$在$A=(A-E)+E$上可测。

（2）由定理6知，$-g(\omega)$是可测函数，于是由

$$f(\omega)+g(\omega)=f(\omega)-[-g(\omega)]$$

及（1）知，$f(\omega)+g(\omega)$是A上的可测函数。

（3）由

$$f(\omega)\cdot g(\omega)=\frac{1}{4}\{[f(\omega)+g(\omega)]^2-[f(\omega)-g(\omega)]^2\}$$

及定理6即可推出$f(\omega)\cdot g(\omega)$的可测性。

（4）因为$g(\omega)\neq 0$，故由（3）及定理6知，

$$\frac{f(\omega)}{g(\omega)}=f(\omega)\cdot\frac{1}{g(\omega)}$$

是A上的可测函数。

（5）对于任何a有

$$A(\max(f,g)\leqslant a)=A(f\leqslant a)\cap A(g\leqslant a)$$

$$A(\min(f,g)\leqslant a)=A(f\leqslant a)\cup A(g\leqslant a)$$

故$\max(f,g)$与$\min(f,g)$都是A上的可测函数。

推论 设$f(\omega)$和$g(\omega)$是定义在A上的两个可测函数，α,β是两个实数，则$\alpha f(\omega)+\beta g(\omega)$是$A$上的可测函数。

定义5 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，$A,A_k\in\mathscr{F}(k-1,2\cdots,n)$，且

$$A_i\cap A_j=\phi(i\neq j),\sum_{k=1}^{n}A_k=A$$

$f(\omega)$是定义在A上的函数，它在集A_k上取实常值α_k，而在$\sum_{k=1}^{n}A_k$外为零，这种函数称为A上的简单函数。

显然简单函数$f(\omega)$可表示为

$$f(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{Ak}(\omega)$$

故它是A上的可测函数。

定义6 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一测度空间，$p(\omega)$是关于ω的一个命题，$\omega\in A\subset\Omega$，如果$\{\omega|p(\omega)$不成立$,\omega\in A\}$是一个P-零集，则称$p(\omega)$ **在A上关于测度P几乎处处成立**，也称$p(\omega)$ **关于测度P对A中几乎所有的ω成立**。

例如，设f、g是定义在A上的两个函数，如果$A(f\neq g)$是一个P-零集，则称A上"f与g关于测度P几乎处处相等"，并用记号$f\doteq g[P]$来表示。其中等号上加点"."表示等号几乎处处成立，后面加"P"表示"几乎处处"是关于P而言的。如果在整个讨论过程中，只出现一个测度，"关于测度P"一词就可省略，相应的符号也简记为"$\doteq$"。$f\doteq g$也称为f对等于g。

类似，如果$A(f>g)$是一个P-零集，则称在A上"f几乎处处（关于P）大于g"，记为$f\dot{>}g[P]$或简记为$f\dot{>}g$。

又如，如果$A(|f|=+\infty)$是一零集，则称f在A上几乎处处有限。

"几乎处处"一词也可用缩写"a.e."来表示，例如$f \doteq g$〔P〕也可记为"$f=g$ a.e.〔P〕"。

定理8 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是完全测度空间。

1°. 如果A_0是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的零集，则定义在A_0上的任何函数都是A_0上的可测函数。

2°. 设$A \subset \Omega$，f、g是定义在A上的函数，如果在A上f几乎处处等于g，则当f是A上的可测函数时，g也是A上的可测函数。

证：1°. 设f定义在A_0上，$P(A_0)=0$，对于任何a，有

$$A_0(f \leqslant a) \subset A_0$$

由于测度是完全的，故A_0的任何子集都可测，所以f是A_0上的可测函数。

2°. 记$A_0 = A(f \neq g)$，$A_1 = A(f=g)$，由假设A_0是零集，如果f在A上可测，则A是可测集，因而$A_1 = A - A_0$也是可测集。因为$A_1 \subset A$，故f在A_1上可测，而且在A_1上，$f=g$，故g在A_1上也可测。因为A_0是零集，故g在A_0上可测，从而g在$A = A_1 \cup A_0$上可测。

习 题 3·2

1. 设f是定义在Ω上的实值函数，则f为$\mathscr{F}$可测的充要条件是下列条件之一满足：

（1）对于任意实数a，$b(a<b)$，$f^{-1}([a, b]) \in \mathscr{F}$

（2）对于任意实数a，$b(a<b)$，$f^{-1}((a, b]) \in \mathscr{F}$

（3）对于任意实数a，$b(a<b)$，$f^{-1}([a, b)) \in \mathscr{F}$

（4）对于任意实数a，$b(a<b)$，$f^{-1}((a, b)) \in \mathscr{F}$

2. 设$(\Omega, \mathscr{F})$是可测空间，f是定义在Ω上的实值函数，如果对于任何实数a，有$\{f=a\} \in \mathscr{F}$，f是否一定$\mathscr{F}$-可测？

3. 广义实值函数的可测性是否可以这样定义：如果对于任何实

数a，都有

$$f^{-1}((-\infty, a])\in\mathscr{F}$$

则称f为$\mathscr{F}$-可测。

4. 如果f是定义在Ω上的广义实值可测函数，第一题中的结论是否仍成立？

5. 如果f是广义实值函数，定理1的充分性部分是否成立？ 必要性部分是否成立？

6. 设f与g是$(\Omega, \mathscr{F})$上的可测函数，$A\in\mathscr{F}$，令

$$h(\omega)=\begin{cases}f(\omega), & \text{如果}\omega\in A\\ g(\omega), & \text{如果}\omega\in A'\end{cases}$$

证明h是可测函数。

7. 设g是从$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$到$(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$的可测映射，$f$是$(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$到$(\Omega_3, \mathscr{F}_3)$的可测映射，则复合映射$f\circ g$是从$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$到$(\Omega_3, \mathscr{F}_3)$的可测映象。

8. 设$f: (\Omega_1, \mathscr{F}_1)\to(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ 是否对于所有的$A\in\mathscr{F}_1$有$f(A)\in\mathscr{F}_2$？ 考虑如下的例子：设$\mathscr{F}_2=\{\phi, \Omega_2\}$，取$A\in\mathscr{F}_1$使$f(A)$是$\Omega_2$的非空真子集。

9. 设$A\subset\Omega$，f是定义在A上的实值函数，如果对于任意实数a，$A(f\leqslant a)\in\mathscr{F}$，则$A\in\mathscr{F}$.

10. 如果f是A上的广义实值函数，上题的结论是否成立？

11. 证明A上的两个简单函数的乘积以及有限个简单函数的线性组合仍为A上的简单函数。

12. 设$f(\omega)$与$g(\omega)$是定义在A上的两个可测函数，证明下列集都是可测集：

（1）$A(f\geqslant g)$；　　（2）$A(f\leqslant g)$；

（3）$A(f<g)$；　　（4）$A(f=g)$。

13. f为A上的可测函数的充要条件是，对一切有理数r，$A(f<r)$是可测集。

14. 设$(\Omega, \mathscr{F})$是可测空间，$A\subset\Omega$，f是定义在A上的函数，而

$$A=\bigcup_{t\in T}A_t$$

其中T是不可列的指标集，如果f在每个A_t上可测，是否f一定在A上可测？

15. （1）设f^2是可测函数，问f是否一定是可测函数？

（2）设f^3是可测函数，问f是否一定是可测函数？

§3·3　可测函数列的收敛性

定理1　设$\{f_n\}$是定义在A上的一列可测函数，则下列函数都是A上的可测函数：

（1）上确界函数　$\sup\limits_{n\geq 1} f_n(\omega)$；

（2）下确界函数　$\inf\limits_{n\geq 1} f_n(\omega)$；

（3）上限函数　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(\omega)$；

（4）下限函数　$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(\omega)$。

证（1）易知，$\sup\limits_{n\geq 1} f_n\leqslant a$的充要条件是，对于所有的$n$，$f_n\leqslant a$，故

$$A(\sup_{n\geq 1} f_n\leqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}A(f_n\leqslant a)$$

所以$\sup\limits_{n\geq 1} f_n$是可测函数。

（2）易知$\inf\limits_{n\geq 1} f_n<a$的充要条件是，存在$n$，使$f_n<a$，故

$$A(\inf_{n\geq 1} f_n<a)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A(f_n<a)$$

所以$\inf\limits_{n\geq 1} f_n$是可测函数。

（3）令

$$g_n=\sup_{k\geq n} f_k$$

由（1）知g_n可测，但

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ f_n=\lim_{n\to\infty} g_n=\inf_{n\geq 1} g_n$$

故由（2）知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ f_n$可测。

同理可证（4）

推论 设$\{f_n\}$是A上的一列可测函数，如果对于一切$\omega\in A$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$存在（极限值可为$\pm\infty$），则极限函数$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$是可则函数。

证 因为

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)=\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(\omega)=\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(\omega)$$

故由定理1知$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$是可测的。

引理1 设$f(\omega)$是A上的非负可测函数，则存在A上的非负简单函数的增序列$\{f_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)=f(\omega) \tag{3.1}$$

在A中处处成立。

证 令

$$f_n(\omega)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^n}, & \text{当}\dfrac{i-1}{2^n}\leqslant f(\omega)<\dfrac{i}{2^n}\\ n, & \text{当}\ f(\omega)\geqslant n\quad(i=1,2,\cdots,2^n n)\end{cases}$$

显然，当$f(\omega)<\dfrac{2^n\cdot n}{2^n}=n$时，有

$$0\leqslant f(\omega)-f_n(\omega)<\frac{1}{2^n} \tag{3.2}$$

下面证明：

1°. $\{f_n(\omega)\}$单调增加。

设$0\leqslant f(\omega)<n$，则存在正整数i，使

$$\frac{i-1}{2^n}\leqslant f(\omega)<\frac{i}{2^n}\qquad(i=1,2,\cdots,2^n n)$$

即

$$\frac{2i-2}{2^{n+1}}\leqslant f(\omega)<\frac{2i}{2^{n+1}}$$

亦即

$$\frac{2i-2}{2^{n+1}} \leqslant f(\omega) < \frac{2i-1}{2^{n+1}} \text{或} \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leqslant f(\omega) < \frac{2i}{2^{n+1}}$$

故

$$f_n(\omega) = \frac{i-1}{2^n}$$

$$f_{n+1}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2i-2}{2^{n+1}}, & \text{当} \dfrac{2i-2}{2^{n+1}} \leqslant f(\omega) < \dfrac{2i-1}{2^{n+1}} \\ \dfrac{2i-1}{2^{n+1}}, & \text{当} \dfrac{2i-1}{2^{n-1}} \leqslant f(\omega) < \dfrac{2i}{2^{n+1}} \end{cases}$$

所以$f_{n+1}(\omega) \geqslant f_n(\omega)$。

再设 $f(\omega) \geqslant n$，分两种情况讨论：

如果$n \leqslant f(\omega) < n+1$，即

$$\frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}} \leqslant f(\omega) < \frac{(n+1)2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

则

$$f_{n+1}(\omega) \geqslant \frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = f_n(\omega)$$

如果$f(\omega) \geqslant n+1$，则

$f_n(\omega) = n < n+1 = f_{n+1}(\omega)$

于是对一切$\omega \in A$，$f_{n+1}(\omega) \geqslant f_n(\omega)$，即$\{f_n(\omega)\}$单调增加。

2°．(3.1) 式成立，分两种情况讨论。

如果$0 \leqslant f(\omega) < +\infty$，则存在正整数$N(\omega)$，使 $f(\omega) < N$，于是当$n \geqslant N$时，$f(\omega) < n$，故由 (3.2) 有

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{2^n} \qquad (n \geqslant N)$$

所以有

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

如果$f(\omega) = +\infty$，则对于任何n，$f_n(\omega) = n$，所以

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = +\infty = f(\omega)$$

定义1 设$f(\omega)$是广义实值函数，令

$$f^{+}(\omega)=\begin{cases} f(\omega), & \text{当 } f(\omega)\geqslant 0 \\ 0, & \text{当 } f(\omega)<0 \end{cases}$$

$$f^{-}(\omega)=\begin{cases} -f(\omega), & \text{当 } f(\omega)<0 \\ 0, & \text{当 } f(\omega)\geqslant 0 \end{cases}$$

函数 f^{+} 与 f^{-} 分别称为 f 的**正部**和**负部**，显然有

1°. $f(\omega)=f^{+}(\omega)-f^{-}(\omega)$;

$\quad |f(\omega)|=f^{+}(\omega)+f^{-}(\omega)$。

2°. 可测函数的正部负部都是可测的；反之，如果一个函数的正部和负部都是可测的，则这个函数本身也是可测的。

定理2 广义实值函数 f 为可测的充分必要条件是它可以表示为一个简单函数列的极限。

证 充分部分可由定理1的推论推出，下证必要性：

设 f 是可测函数，将它分解为正部与负部：

$$f=f^{+}-f^{-}$$

由引理1知，存在非负的简单函数增序列$\{f_n\}$与$\{g_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f^{+},\quad \lim_{n\to\infty} g_n=f^{-}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}(f_n-g_n)=f \tag{3.3}$$

易知，两个简单函数之差仍为简单函数，故（3.3）式将 f 表示简单函数的极限。

定义2 设 f_1，f_2，…，和 f 是可测集A上的广义实值函数，如果A中使

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)=f(\omega)\ \text{（极限值可以为}\pm\infty\text{）}$$

不成立的点的集为一零集，则称$\{f_n\}$在A上**几乎处处收敛于** f，记为$f_n\xrightarrow{\cdot} f[P]$，或$f_n\to f\ a.e.[P]$，或 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f\ a.e.[P]$。

起混淆的情况下（例如在整个讨论过程中，只出现一个测度），式中表示测度的字母（此处为 P）可以省去

例 1 设$(R, \mathscr{L}, m)$为所考虑的测度空间，令

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & \text{如果 } x \text{ 为有理数} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{如果 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

则$f_n(x)\xrightarrow{\cdot}0$。

例 2 设$(R, \mathscr{L}, m)$为所考虑的测度空间，$f(x)$ 是R上的单调函数，令

$$A=\{x \mid x\in R, f'(x)\text{存在且有限}\}$$

由实变函数论知$m(A')=0$。令

$$\varphi(x)=\begin{cases} f'(x), & \text{当 } x\in A \\ \text{任意}, & \text{当} x\in A' \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=\varphi(x)a.e.[m]$$

定理 3 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是完全测度空间，$A\in\mathscr{F}$.$\{f_n\}$是A上定义的一列可测函数，f是A上的广义实值函数，如果在A上$f_n\xrightarrow{\cdot}f$，则f是可测函数。

证 记

$$A_1=A(\lim_{n\to\infty} f_n=f)$$

由于$f_n\xrightarrow{\cdot}f$，故$A-A_1=A_0$是零集，而$\{f_n\}$是A_1上的可测函数列，且当$\omega\in A_1$时，

$$f=\lim_{n\to\infty} f_n$$

由定理 1 的推论知，f是A_1上可测函数，由于$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是完全测度空间，故f在A_0上可测，因此f在$A=A_1\cup A_0$上可测。

定理 4　设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是完全测度空间，$A\subset\Omega$，f、g、$f_n(n=1,2,\cdots)$都是A上的广义实值函数。

（1）如果$f_n \xrightarrow{\cdot} f$且$f_n \xrightarrow{\cdot} g$，则$f \doteq g$；

（2）如果$f_n \xrightarrow{\cdot} f$且$f \doteq g$，则$f_n \xrightarrow{\cdot} g$。

证（1）设

$$N_1=\{\omega \mid f_n\text{不收敛于 } f\}$$

$$N_2=\{\omega \mid f_n\text{不收敛于 } g\}$$

$$N=\{\omega \mid f\neq g\}$$

则

$$N\subset N_1\cup N_2$$

由于

$$P(N_1)=P(N_2)=0$$

且P为完全测度，故$P(N)=0$

（2）采用（1）中的记号，由假设有

$$P(N_1)=P(N)=0$$

又

$$(A-N_1)\cap(A-N)\subset A-N_2$$

故

$$N_2\subset N_1\cup N$$

由于

$$P(N_1\cup N)\leqslant P(N_1)+P(N)=0$$

且P为完全测度，故 $P(N_2)=0$。

定理 5（勒贝格）设A是具有有限测度的可测集，f和f_n $(n=1,2,\cdots)$是A上的几乎处处有限的可测函数，如果在A上$\{f_n\}$几乎处处收敛于f，则对于任何正数ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P(A(|f_n-f|\geqslant\varepsilon))=0 \qquad (3.4)$$

证　设

$$A_0 = A(|f| = +\infty)$$

$$A_n = A(|f_n| = +\infty),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$$

$$B = A(f_n \text{不收敛于} f)$$

$$Q = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \cup B$$

则由假设有

$$P(Q) = 0 \tag{3.5}$$

设

$$B_k(\varepsilon) = A(|f_k - f| \geqslant \varepsilon)$$

$$R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k(\varepsilon)$$

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon)$$

因为$\{R_n(\varepsilon)\}$单调减少，故

$$\lim_{n\to\infty} P(R_n(\varepsilon)) = P(M) \tag{3.6}$$

现在要证明

$$M \subset Q \tag{3.7}$$

事实上，如果$\omega \notin Q$，则$f_1(\omega)$，$f_2(\omega)$，…和$f(\omega)$都是有限数，且

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\omega) = f(\omega)$$

故存在n，使当$k \geqslant n$时，

$$|f_k(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon$$

即$\omega \notin B_k(\varepsilon)(k \geqslant n)$，因此，$\omega \neq R_n(\varepsilon)$，从而$\omega \notin M$，这就证明了（3.7）。于是由（3.5）有$P(M) = 0$，再由（3.6）得

$$\lim_{n\to\infty} P(R_n(\varepsilon)) = 0 \tag{3.8}$$

因为$B_n(\varepsilon) \subset R_n(\varepsilon)$，故由（3.8）即得（3.4）。

定理5启示我们引进下面的定义：

定义 3 设 f 和 $f_n(n=1, 2, \cdots)$ 是 A 上的几乎处处有限的可测函数。如果对于任何正数 ε，

$$\lim_{n\to\infty} P(A(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) = 0$$

就称 $\{f_n\}$ 依测度 P 收敛于 f，或称 $\{f_n\}$（关于测度 P）度量收敛于 f，记为

$$f_n \underset{P}{\Longrightarrow} f$$

如果不致引起混淆，箭头下的 P 也可省去。

如果 P 是概率测度，则依测度收敛也称为依概率收敛，概率论中的弱大数定律所考虑的收敛就是这种收敛。

度量收敛的意义用文字来叙述就是：如果事先给了一个表示偏差的正数 ε，不论这个 ε 多小，使得 $|f_n(\omega) - f(\omega)|$ 大于或等于 ε 的点 ω 虽然可能很多，但这种点 ω 的全体的测度随着 n 无限增大而趋向于零。

利用度量收敛的概念，勒贝格定理可以写成如下的形式。

定理 5 设 A 是具有有限测度的可测集，f 和 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 是 A 上几乎处处有限的可测函数，如果在 A 上 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f，则 $\{f_n\}$ 也度量收敛于 f

概率论中的强大数定律所考虑的收敛性是关于概率测度的几乎处处收敛，于是由勒贝格定理可知，这种收敛性蕴含弱大数定律中的按概率收敛。

下面的例子表明勒贝格定理之逆不成立。另外，这个定理中 A 具有有限测度的条件是不可省略的。

例 3 对于每个自然数 k，将 $A=[0, 1]$ 等分成 k 个区间，依次记为

$$\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \cdots, \Delta_{kk}$$

将这些区间的特征函数排成一列：

$$\varphi_1 = \chi_{11}, \varphi_2 = \chi_{21}, \varphi_3 = \chi_{22}, \varphi_4 = \chi_{31}, \cdots$$

则函数列φ_n度量收敛于0，因为如果 $\varphi_n=\chi_{ki}$， 则对于任意不大于1的正数ε

$$A(|\varphi_n|\geqslant\varepsilon)=\Delta_{ki}$$

但此集的测度等于$\frac{1}{k}$（取P为勒贝格测度），当$n\to\infty$时它趋向于0（如果$\varepsilon>1$，则$A(|\varphi_n|\geqslant\varepsilon)$为空集）。

但对于$[0,1]$中任一点x_0，关系式

$$\varphi_n(x_0)\to 0$$

并不成立。因为对于任意固定的k，必有i，使得$x_0\in\Delta_{ki}$，从而$\chi_{ki}(x_0)=1$，因此在数列

$$\varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0),\ \varphi_3(x_0),\ \cdots$$

中有无穷多项等于1，所以$\varphi_n(x_0)\to 0$不能成立。

例4 取 $A=(0,+\infty)$，P 为勒贝格测度，作函数。

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n]\\ 0, & x\in(n,+\infty)\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

显然，$\{f_n\}$在A上处处收敛于1，但当$0<\varepsilon<1$时，

$$A(|f_n-1|\geqslant\varepsilon)=(n,+\infty)$$

然而$P(n,+\infty)=+\infty$，所以$\{f_n\}$不依测度收敛于1。

定理5表明，在具有有限测度的可测集上，度量收敛的概念是几乎处处收敛的概念的拓广，但这两种收敛还有以下的联系。

定理6 （黎斯(Riesz)）如果$\{f_n\}$在A上度量收敛于f，则必有子列$\{f_{n_k}\}$在A上几乎处处收敛于f。

证 由于

$$\lim_{n\to\infty}P(A(|f_n-f|\geqslant 1))=0$$

故可取正整数n_1，使

$$P(A(|f_{n_1}-f|\geqslant 1))<\frac{1}{2}$$

一般地说，可取正整数 $n_k\ (k>1)$，使它满足

$$P(A(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{1}{k}))<\frac{1}{2^k},\ n_k>n_{k-1}$$

下面我们要证明 $\{f_{n_k}\}$ 就是定理中所要求的子列，即关系式

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega)=f(\omega) \tag{3.9}$$

在 A 中几乎处处成立。其证如下：

设

$$R_i=\bigcup_{k=i}^{\infty} A(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{1}{k})$$

$$Q=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$$

则

$$P(R_i)<\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

由于$\{R_i\}$单调减少，故有

$$P(Q)=\lim_{i\to\infty}P(R_i)=0$$

今证 (3.9) 式对$\omega\in A-Q$成立。因为设$\omega_0\in A-Q$，则存在i_0，使$\omega_0\notin R_{i_0}$，故当$k\geqslant i_0$时，

$$\omega_0\notin A\left(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{1}{k}\right)$$

因此

$$|f_{n_k}(\omega_0)-f(\omega_0)|<\frac{1}{k}\qquad(k\geqslant i_0)$$

因为$\frac{1}{k}\to0$，故(3.9) 式成立。

度量收敛还有如下一些性质：

定理 7 （1） 如果$\{f_n\}$在A上度量收敛于f，则$\{f_n\}$在A上也度量收敛于对等于f的任一可测函数g；

（2） 如果$\{f_n\}$在A上度量收敛于两个函数f与g，则f对等于g。

证（1） 对于任何正数ε，显然有

$$A(|f_n-g|\geqslant\varepsilon)\subset A(f\neq g)\cup A(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$$

因为$P(A(f\neq g))=0$，故由上式有

$$P(A(|f_n-g|\geqslant\varepsilon))\leqslant P(A(|f_n-f|\geqslant\varepsilon))$$

从而由 $f_n\Rightarrow f$ 可推出$f_n\Rightarrow g$。

（2）对于任何正数ε，显然有

$$A(|f-g|<\varepsilon)\supset A\left(|f_n-f|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap A\left(|f_n-g|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

故 $$A(|f-g|\geqslant\varepsilon)\subset A\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup A\left(|f_n-g|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.10}$$

由于$f_n\Rightarrow f$，$f_n\Rightarrow g$，故当$n\to\infty$时

$$P(A(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}))\to 0$$

$$P(A(|f_n-g|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}))\to 0$$

于是由（3.10）有

$$P(A(|f-g|\geqslant\varepsilon))=0$$

因而，从

$$A(f\neq g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A(|f-g|\geqslant\frac{1}{n})$$

即得f与g对等。

定理8 如果在A上$\{f_n\}$度量收敛于f，$\{g_n\}$度量收敛于g，α、β是实常数，则$\{\alpha f_n+\beta g_n\}$度量收敛于$\alpha f+\beta g$。

证 不妨设α、$\beta\neq 0$。对于任何正数ε，显然有

$$A(|\alpha f_n+\beta g_n-\alpha f-\beta g|<\varepsilon)$$
$$\supset A\left(|\alpha f_n-\alpha f|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap A\left(|\beta g_n-\beta g|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

故

$$A(|\alpha f_n+\beta g_n-\alpha f-\beta g|\geqslant\varepsilon)$$
$$\subset A\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right)\cup A\left(|g_n-g|\geqslant\frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right)$$

从而由$f_n\Rightarrow f$ 与 $g_n\Rightarrow g$ 可推出

$$\alpha f_n+\beta g_n\Rightarrow \alpha f+\beta g$$

定义 4 设$\{f_n\}$是A上的一列几乎处处有限的可测函数，f是A上的实值可测函数．如果对于每个$\delta>0$，存在一个可测集$A_\delta\subset A$，使$P(A_\delta)<\delta$并使得$\{f_n\}$在$A-A_\delta$上一致收敛到f，则称$\{f_n\}$在A上几乎一致收敛于f．

定理 9 （叶果洛夫（Егоров））设A是具有有限测度的可测集，$\{f_n\}$是A上的一列几乎处处有限的可测函数列，如果$\{f_n\}$在A上几乎处处收敛于实值可测函数f，则$\{f_n\}$在A上几乎一致收敛于f．

证 对于任给的$\varepsilon>0$，设

$$R_n(\varepsilon)=\bigcup_{k=n}^{\infty}A(|f_k-f|\geqslant\varepsilon)$$

在证明勒贝格定理时已证

$$\lim_{n\to\infty}P(R_n(\varepsilon))=0 \tag{3.11}$$

由此知，对于每个正整数i，存在正整数n_i，使

$$P\left(R_{n_i}\left(\frac{1}{i}\right)\right)<\frac{1}{2^i}$$

对于任给的正数δ，选取充分大的正整数i_0，使

$$\sum_{i=i_0}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\delta$$

记

$$A_\delta=\bigcup_{i=i_0}^{\infty}R_{n_i}\left(\frac{1}{i}\right)$$

则 $\quad P(A_\delta)<\delta$

下面证明在$A-A_\delta$上$\{f_n\}$一致收敛于f．

对于任给的正数ε，取正整数i充分大，使满足

$$i\geqslant i_0,\qquad \frac{1}{i}<\varepsilon$$

于是当 $\omega\in A-A_\delta$ 时，$\omega\notin R_{n_i}\left(\frac{1}{i}\right)$，即当$k\geqslant n_i$ 时

$$\omega\notin A\left(|f_k-f|\geqslant\frac{1}{i}\right)$$

从而

$$|f_k(\omega)-f(\omega)|<\frac{1}{i}<\varepsilon(k\geqslant n_i,\omega\in A-A_\delta)$$ 其中 n_i 只与 ε 有关而与 ω 无关，所以$\{f_n\}$在$A-A_\delta$上一致收敛于 $f(\omega)$.

定理10 设$\{f_n\}$是A上的几乎处处有限的可测函数列，如果$\{f_n\}$几乎一致收敛于实值可测函数 f，则$\{f_n\}$几乎处处收敛于 f。

证 由假设,存在可测集$E_n\subset A$,使得$P(E_n)<\frac{1}{n}$并使得$\{f_n\}$在$A-E_n$上一致收敛于$f(n=1,2,\cdots)$，令

$$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$$

则有

$$P(E)\leqslant P(E_n)<\frac{1}{n}$$

故有$P(E)=0$，在$A-E$上$\{f_n\}$显然收敛于 f。

习 题 3·3

1. 下列各式是否成立：

（1）$A(\sup\limits_{n\geqslant 1}f_n<a)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A(f_n<a)$；

（2）$A(\inf\limits_{n\geqslant 1}f_n\leqslant a)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A(f_n\leqslant a)$。

2. 在定理 3 中去掉测度 P 完全的假定，定理的结论是否成立？

3. 证明度量收敛的可测函数列的每一个子列也度量收敛。

4. 设A具有有限测度，在A上$f_n\Rightarrow f$，$g_n\Rightarrow g$，证明$f_n\cdot g_n\Rightarrow f\cdot g$。

5. 如果$P(A)=+\infty$，上题的结论是否成立？

6. 设$\{f_n\}$在A上度量收敛于f，α是任意正实数，证明

（1）$|f_n|^\alpha\Rightarrow|f|^\alpha$；

（2）如果g是A上的任一可测函数，则

$$|f_n - g|^a \Rightarrow |f - g|^a$$

7．设f和$f_n(n=1, 2, \cdots)$是A上的可测函数，证明在A上$f_n \Rightarrow f$的充要条件是：对于任给的$\varepsilon > 0$，存在自然数N，使得当$n>N$时有

$$P(A(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) < \varepsilon$$

8．设$\xi_n(\omega)$是概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的随机变量．证明

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = 0 \quad a.e.$$

的充要条件是对于任给$\varepsilon>0$和$\eta>0$，存在正整数N使得

$$P(\{\omega \mid |\xi_n(\omega)| < \varepsilon, 对一切 n>N\}) > 1-\eta$$

9．设$(\Omega, \mathscr{F})$是可测空间，A、$A_k \in \mathscr{F}(k=1, 2, \cdots)$且

$$A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

f是定义在A上的函数，它在A_k上取常值a_k，这种函数称为A上的初等函数．

证明A上的每一个实值可测函数可以表为一个一致收敛的初等函数的极限．

10．对于广义实值函数，上题的结论是否成立？

11．设f、$f_n(n=1, 2, \cdots)$是集Ω上的实值函数，证明

（1）$\{\omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)\}$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega \mid |f_{n+i}(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{k}\};$$

（2）$\{\omega \mid f_n(\omega)不收敛于 f(\omega)\}$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega \mid |f_{n+i}(\omega) - f(\omega)| \geqslant \frac{1}{k}\}.$$

12．设f、$f_n(n=1,2, \cdots)$是集A上的几乎处处有限的可测函数，则

（1）$f_n \xrightarrow{a.e.} f$的充要条件是，对任给$\varepsilon>0$，

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} \{\omega \mid |f_{n+i}(\omega) - f(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

（2）如果A具有有穷测度，则$f_n \xrightarrow{a.e.} f$的充要条件是，对任给的

$\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}\{\omega\,|\,|f_{n+i}-f|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

13．试给出几乎处处一致收敛的定义，并与几乎一致收敛的概念相比较．

14．如果存在正常数c，使得$\{\omega\,|\,|f(\omega)|>c\}$是一个测度为零的集，则称$f$是本性有界的．用$\|f\|$表示满足上述条件的数$c$的下确界．证明$\{f_n\}$几乎处处一致收敛于$f$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

15．设A是具有有限测度的可测集，$f_1,f_2,\cdots$与f是A上的几乎处处有限的可测函数，则$\{f_n\}$在A上依测度收敛于f的充要条件是：对于$\{f_n\}$的任一子叙列$\{f_{n_k}\}$都可以从中再找到一个子叙列几乎处处收敛于f．

16．设$\{f_n\}$是A上的一列可测函数，如果对于任何$\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在只依赖于ε和δ的正整数N，使得当n，$m\geq N$时，

$$P(A(|f_n-f_m|>\varepsilon))<\delta$$

则称$\{f_n\}$是依测度基本叙列．

证明如果$\{f_n\}$是可测集A上的依测度基本叙列，且有子叙列$\{f_{n_k}\}$依测度收敛于f，则$f_n\Rightarrow f$．

17．设$\{f_n\}$是可测集A上的一列可测函数，则它是依测度基本叙列的充要条件是：存在某个可测函数f，使得$\{f_n\}$依测度收敛于f．

第四章 积 分 理 论

§4·1 测度有限的集上有界函数的积分

在本章中我们始终假定在一个给定的测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中进行讨论。

定义1 设A是一个具有有限测度的集，f是定义在A上的可测函数，且对一切$\omega\in A$有

$$c<f(\omega)<d \tag{1.1}$$

在区间$[c,d]$中任意插入若干个分点

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d \tag{1.2}$$

来划分区间$[c,d]$，记这一分法为Δ，设

$$A_k=A(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$$

则分别称

$$\overline{S}(\Delta)=\sum_{k=1}^{n}y_kP(A_k)$$

$$\underline{S}(\Delta)=\sum_{k=1}^{n}y_{k-1}P(A_k)$$

为f相应于分法Δ的大和与小和。

显然集$A_k\ (k=1,2,\cdots,n)$两两不相交，且

$$A=\sum_{k=1}^{n}A_k \tag{1.3}$$

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k) \tag{1.4}$$

引理1 若在原来的分点中加入新的分点，则大和不增

加，小和不减少，也就是说，如果加入新分点后对应的大和及小和分别为$\overline{S}(\Delta')$与$\underline{S}(\Delta')$，则

$$\overline{S}(\Delta')\leqslant\overline{S}(\Delta),\quad \underline{S}(\Delta')\geqslant\underline{S}(\Delta)$$

证 不失一般性，我们只就在$[y_{i-1},\ y_i]$中加入一个分点y'而构成新分法Δ'的情况来证明。此时当$k\neq i$时，对新分法而言，$[y_{k-1},\ y_k)$与A_k无变动，但$[y_{i-1},y_i)$却分成

$$[y_{i-1},\ y')\ 与[y',\ y_i)$$

两部分，因而A_i分成两个集的和：

$$A_i=A'_i+A''_i$$

其中

$$A'_i=A(y_{i-1}\leqslant f<y'),\ A''_i=A(y'\leqslant f<y_i)$$

$$P(A_i)=P(A'_i)+P(A''_i) \tag{1.5}$$

于是有

$$\overline{S}(\Delta)-\overline{S}(\Delta')=y_iP(A_i)-y'P(A_i)-y_iP(A''_i) \tag{1.6}$$

由于$y'<y_i$，故由（1.5）与（1.6）有

$$\overline{S}(\Delta)-\overline{S}(\Delta')\geqslant 0\ ，即\ \overline{S}(\Delta)\geqslant\overline{S}(\Delta')$$

同理可证 $\underline{S}(\Delta')\geqslant\underline{S}(\Delta)$

推论 任一个小和不大于任一个大和。

证 设Δ_1与Δ_2是$[c,d]$的任意两个分法，将Δ_1与Δ_2中所有的分点合并起来，组成一个分法Δ_3，则

$$\underline{S}(\Delta_1)\leqslant\underline{S}(\Delta_3),\quad \overline{S}(\Delta_3)\leqslant\overline{S}(\Delta_2)$$

于是由$\underline{S}(\Delta_3)\leqslant\overline{S}(\Delta_3)$即得$\underline{S}(\Delta_1)\leqslant\overline{S}(\Delta_2)$。

引理 2 设$\overline{S}$与$\underline{S}$分别表示所有大和的集合的下确界与所有小和的集合的上确界，即

$$\overline{S}=\inf_{\Delta}\overline{S}(\Delta),\qquad \underline{S}=\sup_{\Delta}\underline{S}(\Delta)$$

则$\overline{S}$与$\underline{S}$都是有限数，且二者相等。

证 设 Δ_0 是一个分法，则任一大和$\overline{S}(\Delta)$ 都满足

$$\underline{S}(\Delta_0)\leqslant\overline{S}(\Delta)$$

所以，所有大和的全体 $\{\overline{S}(\Delta)\}$ 是一个有下界的集，故其下确界$\overline{S}$有限，且

$$\underline{S}(\Delta_0)\leqslant\overline{S}$$

由于 Δ_0 可以任取，故上式也表示所有小和的全体$\{\underline{S}(\Delta)\}$ 是有上界的集，故其上确界$\underline{S}$有限。于是对于任一分法Δ有

$$\underline{S}(\Delta)\leqslant\underline{S}\leqslant\overline{S}\leqslant\overline{S}(\Delta)$$

令

$$\lambda(\Delta)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k-y_{k-1})$$

则由（1.4）有

$$\overline{S}(\Delta)-\underline{S}(\Delta)\leqslant\lambda(\Delta)P(A)$$

从而有

$$0\leqslant\overline{S}-\underline{S}\leqslant\lambda(\Delta)P(A) \qquad (1.7)$$

由于 $\lambda(\Delta)$可任意小，故得

$$\overline{S}=\underline{S}$$

定义 2 设Δ是区间$[c, d]$ 的一个分法，$\sigma(\Delta)$ 是依赖于Δ的一个量（即 $\sigma(\Delta)$ 是Δ的函数），如果存在常数S，它满足如下条件：对于任何 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得对于任何分法Δ，当 $\lambda(\Delta)<\delta$时，有

$$|\sigma(\Delta)-S|<\varepsilon$$

则称当 $\lambda(\Delta)\to0$ 时，$\sigma(\Delta)$有极限S，记为

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to0}\sigma(\Delta)=S$$

引理 3 当$\lambda(\Delta)\to0$ 时，大和$\overline{S}(\Delta)$ 与小和$\underline{S}(\Delta)$ 的极限都存在，且二者相等（用S表示共同的极限值），即

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\overline{S}(\Delta)=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\underline{S}(\Delta)=S \tag{1.8}$$

证 取

$$S=\underline{S}=\overline{S}$$

则对于任一分法Δ有

$$\underline{S}(\Delta)\leqslant S\leqslant\overline{S}(\Delta)$$

由上式及（1.7）有

$$0\leqslant\overline{S}(\Delta)-S\leqslant\lambda(\Delta)P(A)$$

故有

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}(\overline{S}(\Delta)-S)=0$$

即

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\overline{S}(\Delta)=S$$

同理可证

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\underline{S}(\Delta)=S$$

定义 3 设f是定义在具有有限测度的集A上的有界可测函数，则称（1.8）式中的极限为f在A上关于测度P的积分，并用记号

$$\int_A f(\omega)P(d\omega) \quad 或 \quad \int_A f dP \tag{1.9}$$

来表示．

由引理3易知，积分（1.9）的值与其在定义中所用到的数c与d无关．事实上，设(c^*, d^*)是包含f的值域的另一个区间，即对一切$\omega\in A$有

$$c^*<f(\omega)<d^*$$

为确定起见，不妨设

$$c<c^*<f(\omega)<d^*<d$$

在$[c, d]$中插入分点

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d$$

来划分区间，并设c^*与d^*都是分点之一，即设

$$c^* = y_l, \quad d^* = y_m$$

于是当 $k>m$ 或 $k\leqslant l$ 时有

$$P(A_k)=0$$

因此得到

$$\overline{S}=\sum_{k=1}^{n} y_k P(A_k)=\sum_{k=l+1}^{m} y_k P(A_k)=\overline{S}^* \qquad (1.10)$$

其中$\overline{S}^*$是由 (c^*, d^*)产生的大和，将分点加密然后取其极限，则由上式可知由 (c, d)与(c^*, d^*)得到的积分值 S 与 S^* 相等。这个事实是很重要的，因为只有这样才使积分的定义摆脱了选取 c、d 时的偶然性。

从以上的讨论知，对于定义在具有有限测度的集A上的任何有界可测函数f，积分（1.9）都有意义，且为一个有限数，这时我们也说f在A上可积。

定理1 设 $P(A)<\infty$，f 是定义在A上的有界可测函数，且在A上满足

$$c\leqslant f(\omega)\leqslant d$$

则
$$cP(A)\leqslant\int_A f dP\leqslant dP(A) \qquad (1.11)$$

证 任取正数ε，则

$$c-\varepsilon<f(\omega)<d+\varepsilon$$

设Δ是 $[c-\varepsilon, d+\varepsilon]$ 的任一分法：

$$c-\varepsilon=y_0<y_1<\cdots<y_n=d+\varepsilon$$

则

$$c-\varepsilon<y_k\leqslant d+\varepsilon \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

故
$$(c-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} P(A_k)<\sum_{k=1}^{n} y_k P(A_k)$$

$$\leqslant(d+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

因此

$$(c-\varepsilon)P(A)<\overline{S}(\Delta)\leqslant(d+\varepsilon)P(A)$$

先令$\lambda(\Delta)\to C$，再令$\varepsilon\to 0$，就得到（1.11）式。

推论 1 设 $P(A)<\infty$，如果在A上取常数值c，则

$$\int_A f dP=cP(A)$$

推论 2 设 $P(A)<\infty$，f是A上的有界可测函数，如果f不是负的（不是正的），则它的积分也不是负数（不是正数）。

推论 3 如果 $P(A)=0$，则任何有界可测函数在A上的积分等于0。

定理 2 设 $P(A)<+\infty$，f是A上的有界可测函数，如果A分解为有限个互不相交的可测集的和：

$$A=\sum_{k=1}^{n}A_k$$

则

$$\int_A f dP=\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} f dP \tag{1.12}$$

证 先就A分解为两个集时和

$$A=A'+A''$$

的情况来证明。设在A上

$$c<f(\omega)<d$$

又设

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$$

是$[c, d]$的任一分法，记为Δ。令

$$E_k=A(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$$

$$E'_k=A'(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$$

$$E''_k=A''(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$$

则

$$E_k=E'_k+E''_k$$

$$P(E_k)=P(E_k')+P(E_k'')$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} y_k P(E_k)=\sum_{k=1}^{n} y_k P(E_k')+\sum_{k=1}^{n} y_k P(E_k'')$$

令 $\lambda(\Delta)\to 0$即得

$$\int_A f dP=\int_{A'} f dP+\int_{A''} f dP \tag{1.13}$$

用数学归纳法由（1.13）即可推出（1.12）．

定理 3 设 $P(A)<\infty$， f 是A上的有界可测函数．如果A分解为可列个互不相交的可测集的和：

$$A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \tag{1.14}$$

则

$$\int_A f dP=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f dP \tag{1.15}$$

证 由（1.14）有

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{1.16}$$

令

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \tag{1.17}$$

则由（1.16）与（1.17）有

$$\lim_{n\to\infty} P(R_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k)=0 \tag{1.18}$$

由定理 2 有

$$\int_A f dP=\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} f dP+\int_{R_n} f dP \tag{1.19}$$

设在A上

$$c<f(\omega)<d$$

于是由定理 1 有

$$cP(R_n)\leqslant \int_{R_n} f dP\leqslant dP(R_n)$$

由上式及（1.18）有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f dP = 0$$

于是在（1.19）中令 $n\to\infty$ 即得（1.15）。

（1.12）式称为积分的有限可加性，（1.15）式则称为积分的可列可加性。

在以下的各推论中，设 A 是具有有限测度的可测集。

推论1 设 f 与 g 是定义在 A 上的两个对等的有界可测函数，则

$$\int_A f dP = \int_A g dP \tag{1.20}$$

证 令

$$A_1 = A(f \neq g),\quad A_2 = A(f = g)$$

则 $P(A_1) = 0$，因而

$$\int_{A_1} f dP = \int_{A_1} g dP = 0$$

在 A_2 上 $f = g$，故

$$\int_{A_2} f dP = \int_{A_2} g dP$$

将以上二式两边相加并利用积分的有限可加性即得（1.20）。

推论2 设 f 是 A 上的非负有界可测函数，如果

$$\int_A f dP = 0$$

则 f 对等于 0。

证 由于

$$A(f>0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A\left(f>\frac{1}{n}\right)$$

如果 f 不对等于 0，则存在正整数 N，使得

$$P\left(A\left(f>\frac{1}{N}\right)\right) = \sigma > 0$$

令

$$A_1 = A\left(f>\frac{1}{N}\right),\quad A_2 = A - A_1$$

则 $$\int_{A_1} f dP \geqslant \frac{\sigma}{N},\quad \int_{A_2} f dP \geqslant 0$$

于是

$$\int_A f dP = \int_{A_1} f dP + \int_{A_2} f dP \geqslant \frac{\sigma}{N} > 0$$

这与假设矛盾.

引理 4 设 $P(A) < \infty$，f 与 g 都是 A 上定义的有界可测函数，则

$$\int_A (f+g) dP = \int_A f dP + \int_A g dP \tag{1.21}$$

证 设在 A 上

$$c < f(\omega) < d,\quad c < g(\omega) < d$$

又设

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

是 $[c,d]$ 的任一分法，记为 Δ，令

$$\left.\begin{aligned} F_k &= A(y_{k-1} \leqslant f < y_k) \\ G_k &= A(y_{k-1} \leqslant g < y_k) \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$T_{ij} = F_i \cap G_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

显然

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T_{ij}$$

$$\int_A (f+g) dP = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{T_{ij}} f dP$$

当 $\omega \in T_{ij}$ 时，有

$$y_{i-1} + y_{j-1} \leqslant f(\omega) + g(\omega) < y_i + y_j$$

由定理 1 得

$$(y_{i-1} + y_{j-1}) P(T_{ij}) \leqslant \int_{T_{ij}} (f+g) dP \leqslant (y_i + y_j) P(T_{ij})$$

将这些不等式各边分别相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_{i-1} + y_{j-1}) P(T_{ij})$$

$$\leqslant \int_A (f+g)dP$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_i + y_j) P(T_{ij}) \tag{1.22}$$

但

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i P(T_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{n} P(T_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i P\left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i P\left(\sum_{j=1}^{n} F_i \cap G_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i P(F_i)$$

$$= \overline{S}_f(\Delta)$$

此处$\overline{S}_f(\Delta)$ 表示f相应于分法Δ的大和。

用同样的方法可以计算（1.22）中其它的和．于是(1.22)可以写为

$$\underline{S}_f(\Delta) + \underline{S}_g(\Delta) \leqslant \int_A (f+g)dP$$

$$\leqslant \overline{S}_f + \overline{S}_g(\Delta) \tag{1.23}$$

其中的记号是不讲自明的。

在（1.23）中令$\lambda(\Delta)\to 0$，即得（1.21）．

引理 5 设 $P(A)<\infty$， f是定义在A上的有界可测函数，c是一个有限常数，则

$$\int_A cf dP = c\int_A f dP \tag{1.24}$$

证 当 $c=0$ 时（1.24）显然成立。

今设 $c>0$，$a<f(\omega)<b$。又设

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

是$[a,b]$的任一分法，记为Δ．按定义1引进$\overline{A}_i$，$\overline{S}(\Delta)$和$\underline{S}(\Delta)$，则

$$\int_A cfdP=\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}cfdP$$

但当 $\omega\in A_k$ 时，有

$$cy_{k-1}\leqslant cf(\omega)<cy_k$$

于是由定理1有

$$cy_{k-1}P(A_k)\leqslant\int_{A_k}cfdP\leqslant cy_kP(A_k)$$

将这些不等式各边分别相加，得

$$c\underline{S}(\Delta)\leqslant\int_A cfdP\leqslant c\overline{S}(\Delta)$$

在上式中令$\lambda(\Delta)\to 0$，即得（1.24）．

$c<0$ 的情况可以类似地证明。

定理4 设 $P(A)<\infty$，f、g 是A上的有界可测函数，α、β 是两个有限常数，则

$$\int_A(\alpha f+\beta g)dP=\alpha\int_A fdP+\beta\int_A gdP \tag{1.25}$$

等式（1.25）称为**积分的线性性**。

本定理是引理4与5的直接推论。

推论 设 $P(A)<\infty$，f、g 是A上的有界可测函数，则

$$\int_A(f-g)dP=\int_A fdP-\int_A gdP$$

定理5 （积分的单调性）设 $P(A)<\infty$，f，g 是A上有界可测函数，如果

$$f(\omega)\leqslant g(\omega) \tag{1.26}$$

在A上几乎处处成立，则

$$\int_A fdP\leqslant\int_A gdP \tag{1.27}$$

证 根据定理3的推论1，只需就（1.26）在A上处处成立的情况来证明。此时

$$g(\omega)-f(\omega)\geqslant 0\quad(\omega\in A)$$

于是有

$$\int_A gdP-\int_A fdP=\int_A(g-f)dP\geqslant 0$$

故（1.27）式成立。

推论1 设 $P(A)<\infty$，f 是 A 上的有界可测函数，如果 $f(\omega)\geqslant 0$ 在 A 上几乎处处成立，则

$$\int_A f dP\geqslant 0$$

定理6 设 $P(A)<\infty$，f 是 A 上的有界可测函数，则

$$\left|\int_A f dP\right|\leqslant\int_A|f|dP \tag{1.28}$$

证 由于

$$-|f|\leqslant f\leqslant|f|$$

故根据积分的单调性即得

$$-\int_A|f|dP\leqslant\int_A f dP\leqslant\int_A|f|dP$$

由此即得（1.28）。

习　题　4·1

1．设 $P(A)<\infty$，f 是定义在 A 上的有界可测函数，证明

$$\int_A f dP=\lim_{n\to\infty}\sum_k\frac{k}{n}P\left(A\left(\frac{k}{n}\leqslant f<\frac{k+1}{n}\right)\right)$$

2．设 $P(A)<\infty$，f 是 A 上的有界可测函数，则对于任何正数 ε，都存在 A 上的简单函数 φ，使

$$\int_A|f-\varphi|dP<\varepsilon$$

3．设 $P(A)<\infty$，$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$，其中 A_k 为可测集．如果 A 中的每个点 ω 至少居于上述几个集中的 q 个，则 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个集具有测度 $\geqslant\frac{q}{n}P(A)$。

4．设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是全有限的测度空间，f 是 Ω 上的非负有界可测函数，$A\in\mathscr{F}$，令

$$m(A)=\int_A f dP,\quad m(\phi)=0$$

证明 $m(A)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的全有限测度．

5．设 $0<P(A)<\infty$，f 与 g 是 A 上的可积函数，由

$$f(\omega)<g(\omega)$$

在A上几乎处处成立能否推出

$$\int_A f dP<\int_A g dP$$

§4·2 测度σ-有限的集上一般可测函数的积分

引理1 设 $P(A)<\infty$，f 是A上定义的非负可测函数，N是任一正整数，令

$$[f(\omega)]_N=\begin{cases} f(\omega), & \text{当 } f(\omega)\leqslant N \\ N, & \text{当 } f(\omega)>N \end{cases}$$

则 $[f]_N$ 是一可测函数，且极限

$$\lim_{N\to\infty}\int_A [f]_N dP \tag{2.1}$$

存在（有限或无限）。

证 由等式

$$A([f]_N\leqslant c)=\begin{cases} A(f\leqslant c), & \text{当 } c\leqslant N \\ A, & \text{当 } c>N \end{cases}$$

知 $[f]_N$ 是可测的（这里并未要求A的测度有限）。因为 $[f]_N$ 是有界函数，故积分 $\int_A [f]_N dP$ 存在。此外显然有

$$[f(\omega)]\leqslant[f(\omega)]_2\leqslant[f(\omega)]_3\leqslant\cdots$$

故

$$\int_A [f]_1 dP\leqslant\int_A [f]_2 dp\leqslant\int_A [f]_3 dP\leqslant\cdots$$

所以极限（2.1）存在。

定义1 设 $P(A)<\infty$，f 是定义在A上的非负可测函数，则称（2.1）所表示的极限为 f 在A上的积分，并记为

$$\int_A f dP$$

如果这个积分是一个有限数，则称函数 f 在A上可积。

易知，对于测度有限的集上的非负有界可测函数而言，新的积分定义和老的积分定义是一致的，这是因为当 N 充分大时，有

$$[f]_N \equiv f$$

显然此处定义的积分具有可加性。事实上，设 $A = A_1 + A_2$，其中 A_1，A_2 是可测集，则

$$\begin{aligned}\int_A f dP &= \lim_{N\to\infty}\int_A [f]_N dP \\ &= \lim_{N\to\infty}\left\{\int_{A_1}[f]_N dP + \int_{A_2}[f]_N dP\right\} \\ &= \int_{A_1} f dp + \int_{A_2} f dP\end{aligned}$$

定义 2 设 A 是一个可测集，如果

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

是 A 的一列可测子集，而且

$$P(A_n) < \infty, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

则称 $\{A_n\}$ 是 A 的一列单调测度有限覆盖。

显然具有 σ-有限测度的集一定存在单调测度有限覆盖。

事实上，如果 A 具有 σ-有限测度，则按定义，存在可测集列 $\{E_n\}$ 使

$$P(E_n) < \infty, \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

令

$$A_n = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$$

则 $\{A_n\}$ 就是 A 的一列单调测度有限覆盖。

定义 3 设 A 是一个具有 σ-有限测度的集，$\{A_n\}$ 是 A 的一列单调测度有限覆盖，f 是定义在 A 上的非负可测函数，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} fdP \tag{2.2}$$

称为 f 在A上的积分，并记为

$$\int_A fdP$$

如果这个积分是一个有限数，则称函数 f 在A上可积.

注：由于 f 非负而 $\{A_n\}$ 单调增加，故由积分的可加性知 $\int_{A_n} fdP$ 是一个增序列，因而极限（2.2）一定存在（但可能为无限）.

我们要说明这样定义的积分是确定的．也就是说要证明极限（2.2）的值与单调测度有限覆盖列 $\{A_n\}$ 的选取无关. 以下的两个引理就是证明这一事实.

引理 2　设A是一个具有 σ-有限测度的集，f 是定义在A上的非负可测函数，$\{A_n\}$ 是A的单调测度有限覆盖，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} fdP = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} [f]_n dP \tag{2.3}$$

证　由于

$$f \geqslant [f]_N$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} fdP \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} [f]_n dP \tag{2.4}$$

设

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} fdP = I$$

下面我们考虑 $I<\infty$的情况，此时任给 $\varepsilon>0$，存在正整数N，使

$$\int_{A_N} fdP > I - \frac{\varepsilon}{2}$$

根据定义 1 由上式知，存在正整数m，使

$$\int_{A_N} [f]_m dP > I - \varepsilon$$

不妨设 $m \geqslant N$，于是有

$$\int_{A_m} [f]_m dP > I - \varepsilon$$

由于 ε 任意而 $\{\int_{A_n}[f]_n dP\}$ 单调增加，故由上式有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}[f]_n dP \geqslant I = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f dP \tag{2.5}$$

同理可证当 $I=\infty$ 时，（2.5）仍成立。

由（2.4）与（2.5）即得（2.3）。

引理 3 设 A 是一个具有 σ-有限测度的集，f 是定义在 A 上的非负可测函数，$\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 都是 A 的单调测度有限覆盖，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}[f]_n dP = \lim_{n\to\infty}\int_{B_n}[f]_n dP \tag{2.6}$$

证 如果这两个极限都为 ∞，则（2.6）自然成立。下面考虑这两个极限中有一个为有限的情况，不妨设

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}[f]_n dP = A < \infty \tag{2.7}$$

由于 $\{\int_{A_n}[f]_n dP\}$ 是单调增加的数列，故对一切正整数 n，有

$$\int_{A_n}[f]_n dP \leqslant A$$

根据有限测度集上的有界可测函数积分的可加性和单调性，对于每个正整数 m，当 $n \geqslant m$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{B_m}[f]_m dP &= \int_{B_m \cap A_n}[f]_m dP + \int_{B_m - A_n}[f]_m dP \\ &\leqslant \int_{A_n}[f]_n dP + mP(B_m - A_n) \\ &\leqslant A + mP(B_m - A_n)\end{aligned} \tag{2.8}$$

由于对固定的 m，$\{B_m - A_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是单调减少的集列，且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(B_m - A_n) = B_m - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B_m - A = \phi$$

又 $P(B_m - A_1) \leqslant P(B_m) < \infty$， 故根据测度的上连续性有

$$\lim_{n\to\infty} P(B_m - A_n) = 0$$

于是在（2.8）中令 $n\to\infty$，即得

$$\int_{B_m}[f]_m dP \leqslant A$$

令 $m\to\infty$ 即得

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B_m}[f]_m dP\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}[f]_n dP \tag{2.9}$$

由于$\{A_n\}$与$\{B_m\}$处于平等的地位，故仿照上面的证明，由

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B_m}[f]_m dP$$

的有限性又可推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}[f]_n dP\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_{B_m}[f]_m dP \tag{2.10}$$

由（2.9）与（2.10）即得（2.6）。

以上两个引理表明，极限（2.2）的值与单调测度有限覆盖列$\{A_n\}$的选取无关。因而定义3是确定的。

易知，对于测度有限的集上的非负可测函数而言，新的积分定义与老的积分定义是一致的，因为可取$A_n=A(n=1,2,\cdots)$为A的单调测度有限覆盖。

推论　设f在A上可积，$\{A_n\}$是A的单调测度覆盖，则

$$\int_A fdP=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}[f]_n dP$$

定义4　设A是一个具有σ-有限测度的集，f是定义在A上的可测函数，如果f的正部f^+和负部f^-中至少有一个在A上可积，则称

$$\int_A f^+dP-\int_A f^-dP$$

为f在A上的积分（有限或无限），并记为

$$\int_A fdP$$

如果$\int_A fdP$有限，则称f在A上可积。

显然f在A上可积的充要条件是f^+与f^-都在A上可积。

易知，对于非负可测函数来说，积分及可积性的新、旧定义是一致的。

在公理化的概率论中，随机变量的数学期望就是用概率空

间上的积分来定义的，即设$\xi(\omega)$是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量，则称积分

$$\int_\Omega \xi(\omega)dP$$

为$\xi(\omega)$的**数学期望**，记为 $E\xi$

下面我们来介绍积分的一些重要性质。

引理 4 设A是具有σ-有限测度的集，f是A上的可积函数，g是A上的可测函数，如果

$$|g| \leqslant f \tag{2.11}$$

则g也是可积的。

证 由（2.11）有

$$g^+ \leqslant f, \quad g^- \leqslant f$$

设$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖，对任何正整数n，显然有

$$\int_{A_n} [g^+]_n dP \leqslant \int_{A_n} [f]_n dP \leqslant \int_A f dP$$

于是由引理 2 有

$$\int_A g^+ dP = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} [g^+] dP \leqslant \int_A f dP < \infty$$

因此 g^+ 是可积的。同理可证 g^- 也是可积的。

引理 5 设f、g是集A上的两个非负函数，则对于任何正整数n，有

$$[f+g]_n \leqslant [f]_n + [g]_n \leqslant [f+g]_{2n} \tag{2.12}$$

证 设$\omega \in A$，如果

$$f(\omega) < n, \quad g(\omega) < n$$

则显然有

$$[f(\omega)+g(\omega)]_n \leqslant f(\omega)+g(\omega)$$
$$= [f(\omega)]_n + [g(\omega)]_n$$

如果$f(\omega)$与$g(\omega)$中至少有一个不小于n，例如$f(\omega) \geqslant n$，则

$$[f(\omega)+g(\omega)]_n = n$$
$$\leqslant n + [g(\omega)]_n$$

$$=[f(\omega)]_n+[g(\omega)]_n$$

故（2.12）左端不等式成立。

由于

$$[f]_n+[g]_n\leqslant f+g$$

$$[f]_n+[g]_n\leqslant 2n$$

故

$$[f]_n+[g]_n\leqslant\min(f+g,\ 2n)=[f+g]_{2n}$$

即（2.12）右端的不等式成立。

引理6 设A是具有σ-有限测度的集，f与g是A上的可积函数，则$f+g$也是可积函数，且

$$\int_A(f+g)dP=\int_A fdP+\int_A gdP \tag{2.13}$$

证 先考虑$f\geqslant0$，$g\geqslant0$的情况．设$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖，根据引理5及测度有限的集上的有界函数的积分的性质有

$$\begin{aligned}\int_{A_n}[f+g]_n dP&\leqslant\int_{A_n}([f]_n+[g]_n)dP\\&=\int_{A_n}[f]_n dP+\int_{A_n}[g]_n dP\\&\leqslant\int_{A_n}[f+g]_{2n}dP\\&\leqslant\int_{A_{2n}}[f+g]_{2n}dP\end{aligned} \tag{2.14}$$

在（2.14）的第一个不等式中令$n\to\infty$，得

$$\int_A(f+g)dP\leqslant\int_A fdP+\int_A gdP \tag{2.15}$$

再在（2.14）的后两个不等式中令$n\to\infty$，得

$$\int_A fdP+\int_A gdP\leqslant\int_A(f+g)dP \tag{2.16}$$

由（2.15）及（2.16）即得（2.13）．

利用数学归纳法可将（2.13）推广到有限个非负可积函数的情况。

下面考虑f，g是一般可积函数的情况。

由于

$$(f+g)^+\leqslant f^++g^+,\ (f+g)^-\leqslant f^-+g^-$$

故由引理4知，$f+g$ 是可积的。又由于

$$(f+g)^+-(f+g)^-=f+g=(f^+-f^-)+(g^+-g^-)$$

从而有

$$(f+g)^++f^-+g^-=f^++g^++(f+g)^- \qquad (2.17)$$

由于前面已证对非负可积函数（2.13）成立，故由（2.17）有

$$\int_A(f+g)^+dP+\int_Af^-dP+\int_Ag^-dP$$
$$=\int_Af^+dP+\int_Ag^+dP+\int_A(f+g)^-dP$$

其中每一项都是有限数，移项后即得（2.13）。

引理7　设A是具有σ-有限测度的集，f是A上的可积函数，c是一个有限常数，则

$$\int_AcfdP=c\int_AfdP \qquad (2.18)$$

证　先考虑 $f\geqslant0$，$c>0$ 的情况。如果c是任一正整数，则（2.18）可由引理6推出。如果 $c=\frac{1}{k}$ 而k为正整数，则由引理6有

$$\int_AfdP=k\int_A\frac{1}{k}fdP$$

故

$$\int_A\frac{1}{k}fdP=\frac{1}{k}\int_AfdP$$

由此再应用引理6可知，当c为有理数时，（2.18）成立。如果c是一正无理数，则存在正有理数r、s，使$r<c<s$，由于$f\geqslant0$，故由引理2，根据有限测度集上的有界函数的积分单调性易证。

$$\int_ArfdP\leqslant\int_AcfdP\leqslant\int_AsfdP$$

由于c为有理数时，（2.18）成立，故上式可写为

$$r\int_AfdP\leqslant\int_AcfdP\leqslant s\int f_AdP$$

令r与s趋向c即得（2.18）。

下面考虑 f 为一般可积函数的情况，当 $c=0$ 时，(2.18) 当然成立，若 $c>0$，则由等式

$$(cf)^+=cf^+,\ (cf)^-=cf^-$$

知，此时 (2.18) 可归结为前面已证的非负可积函数的情况。

由

$$(-f)^+=f^-,\ (-f)^-=f^+$$

有

$$\int_A(-f)dP=\int_A f^-dP-\int_A f^+dP=-\int_A fdP$$

故当 $c=-1$ 时，(2.18) 式成立.

若 c 是任意负数，则

$$\int_A cfdP=-\int_A|c|fdP=-|c|\int_A fdP=c\int_A fdP$$

故 (2.18) 成立。

定理 1 设 A 是具有 σ-有限测度的集，f、g 是 A 上的两个可积函数，α、β 是两个有限常数，则 $\alpha f+\beta g$ 也是可积函数，且

$$\int_A(\alpha f+\beta g)dP=\alpha\int_A fdP+\beta\int_A gdP \tag{2.19}$$

等式 (2.19) 称为积分的线性性。

本定理是引理 6 与 7 的直接推论。

定理 2 设 A 是具有 σ-有限测度的集，f 是 A 上的可测函数，则 f 在 A 上可积的充要条件是 $|f|$ 在 A 上可积，且当 f 可积时有

$$\left|\int_A fdP\right|\leqslant\int_A|f|dP \tag{2.20}$$

证 由于

$$|f|=f^++f^- \tag{2.21}$$

故由引理 4 知，如果 $|f|$ 可积，则 f^+，f^- 都可积，于是 f 可积。

反过来，如果 f 可积，则 f^+ 与 f^- 都可积，于是由 (2.21) 知，$|f|$ 也可积，且

$$\int_A |f| dP = \int_A f^+ dP + \int_A f^- dP$$

又由定义，有

$$\int_A f dP = \int_A f^+ dP - \int_A f^- dP$$

由以上二式即得（2.20）。

定理 3 设A是具有σ-有限测度的集，如果f在A上可积，则f在A上几乎处处有限。

证 设$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖。根据定理2，不妨设$f \geqslant 0$。令$E = A(f = +\infty)$，则

$$[f(\omega)]_n = n, \quad \omega \in E$$

因此

$$\int_{A_n} [f]_n dP \geqslant \int_{E \cap A_n} [f]_n dP = n \cdot P(E \cap A_n) \qquad (2.22)$$

由于$\{E \cap A_n\}$是E的单调测度有限覆盖。故有

$$\lim_{n \to \infty} P(E \cap A_n) = P(E)$$

于是如果$P(E) > 0$，则由（2.22）有

$$\int_A f dP \geqslant \lim_{n \to \infty} \int_{E \cap A_n} [f]_n dP = \infty$$

这与f在A上可积矛盾，故必须有$P(E) = 0$。

定理 4 设A是具有σ-有限测度的集，如果$P(A) = 0$，则A上的一切可测函数f都在A上可积，且

$$\int_A f dP = 0$$

证 根据定理2，不妨设$f \geqslant 0$，于是由上节定理1的推论3及本节引理2即得本定理。

定理 5 设A是具有σ-有限测度的集，如果f在A上可积，则f在A的任何可测子集上也可积。

证 设E是A的任意可测子集，$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖。根据定理2，不妨设$f \geqslant 0$，我们有

$$\int_{E \cap A_n} [f]_n dP \leqslant \int_{A_n} [f]_n dP$$

令$n \to \infty$即得

$$\int_E f dP = \lim_{n\to\infty}\int_{E\cap A_n}[f]_n dP \leqslant \int_A f dP < \infty$$

定理6 设A是具有σ-有限测度的集，f、g是A上的可测函数，如果$f \doteq g$，则由两积分$\int_A f dP$与$\int_A g dP$中一个存在可导出另一个存在，且彼此相等。

证 设$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖，由假设有$f^+ \doteq g^+$，由此有

$$[f^+(\omega)]_n \doteq [g(\omega)]_n$$

于是由上节定理3的推论1有

$$\int_{A_n}[f^+]_n dP = \int_{A_n}[g^+]_n dP$$

令$n\to\infty$即得

$$\int_A f^+ dP = \int_A g^+ dP$$

同理可证

$$\int_A f^- dP = \int_A g^- dP$$

由以上二式即得本定理。

定理7 设A是具有σ-有限测度的集，f、g是A上的可积函数，如果$f \dot{\geqslant} g$，则

$$\int_A f dP \geqslant \int_A g dP \tag{2.23}$$

证 设$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖。由定理6知，不妨设$f\geqslant g$处处成立，于是有

$$f-g\geqslant 0$$

由此有

$$\int_{A_n}[f-g]_n dP \geqslant 0$$

令$n\to\infty$得

$$\int_A (f-g) dP \geqslant 0$$

根据定理1，由上式可得

$$\int_A f dP - \int_A g dP \geqslant 0$$

即(2.23)成立。

定理8 设A是具有σ-有限测度的集，f是A上的可积函数，g是A上的可测函数，如果$|g|\leqslant f$，则g也在A上可积，且

$$\left|\int_A g dP\right|\leqslant\int_A f dP$$

证 令

$$E=A(|g|>f)$$

$$\widetilde{f}(\omega)=\begin{cases} f(\omega), & \text{当 } \omega\in A-E \\ |g(\omega)|, & \text{当 } \omega\in E \end{cases}$$

则对于一切$\omega\in A$有

$$|g(\omega)|\leqslant\widetilde{f}(\omega)$$

由于$P(E)=0$，故$\widetilde{f}\doteq f$，从而由定理6知$\widetilde{f}$在A上可积，于是由引理4、定理7及定理2即得所需结论。

定理9 设A是具有σ-有限测度的集，f是A上的可测函数，如果$f\geqslant 0$且$\int_A f dP=0$，则$f\doteq 0$。

证 令

$$E=A(f<0)$$

$$\widetilde{f}(\omega)=\begin{cases} f(\omega), & \text{当 } \omega\in A-E \\ 0, & \text{当 } \omega\in E \end{cases}$$

则对于一切ω有$\widetilde{f}\geqslant 0$，由于$P(E)=0$，故$\widetilde{f}\doteq f$，于是由定理6知，$\int_A\widetilde{f}dP=0$。设$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖，则有

$$0\leqslant\int_{A_n}[\widetilde{f}]_n dP\leqslant\int_A\widetilde{f}dP=0$$

故对一切n有

$$\int_{A_n}[\widetilde{f}]_n dP=0$$

于是由上节定理3的推论2知，在A_n上$[\widetilde{f}]_n\doteq 0$，由此知在$A_n$上$\widetilde{f}\doteq 0$，因为$A_n\uparrow A$，故在$A$上有$\widetilde{f}\doteq 0$，从而有$f\doteq 0$。

定理10 （**积分的有限可加性**）设A具有σ-有限测度，且是有限个两两不相交的可测集的和集：

$$A=\sum_{k=1}^{n}A_k$$

（1）如果 f 是 A 上的非负可测函数，则有

$$\int_A fdP=\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}fdP \qquad (2.24)$$

（2）如果 f 在每个 A_k 上可积，则 f 在 A 上也可积，且 (2.24) 成立。

证 下面就 $n=2$ 的情形来证明，一般情形可由归纳法完成。

（1）设 $f\geqslant 0$. $\{B_n\}$是 A 的单调测度有限覆盖，则$\{A_1\cap B_n\}$与$\{A_2\cap B_n\}$分别为 A_1 与A_2 的单调测度有限覆盖，利用有限测度集上有界函数积分的可加性，对于任何 n，有

$$\int_{B_n}[f]_n dP=\int_{A_1\cap B_n}[f]_n dP+\int_{A_2\cap B_n}[f]_n dP$$

令 $n\to\infty$ 即得

$$\int_A fdP=\int_{A_1}fdP+\int_{A_2}fdP \qquad (2.25)$$

（2）设 f 是任意符号的可测函数，则由 (2.25) 有

$$\int_A f^+dP=\int_{A_1}f^+dP+\int_{A_2}f^+dP$$

$$\int_A f^-dp=\int_{A_1}f^-dP+\int_{A_2}f^-dP$$

由于 f 在 A_1 与 A_2 上可积，故以上二等式两端都是有限数，从第一式减去第二式即得所需结果。

定理11 （绝对连续性）设A是具有 σ-有限测度的集，f 是 A 上的可积函数，则对于任何 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使当 $P(e)<\delta$（e 为A 的任一可测子集）时，就有

$$\left|\int_e fdP\right|<\varepsilon \qquad (2.26)$$

证 设$\{A_n\}$是A 的单调测度有限覆盖，由定理 2 知，$|f|$ 在 A 上可积，于是存在正整数 N，使得

$$0\leqslant\int_A|f|dP-\int_{A_N}[|f|]_N dP<\frac{\varepsilon}{2}$$

由于

$$A_N \subset A,\ [|f|]_N \leqslant |f|$$

故由上式有

$$0 \leqslant \int_A (|f| - [|f|]_N) dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

利用（2.20）式并注意到$[f]_N \leqslant N$，得

$$\begin{aligned} \left|\int_e f dP\right| &\leqslant \int_e |f| dP = \int_e (|f| - [|f|]_N) dP + \int_e [|f|]_N dP \\ &\leqslant \int_A (|A| - (|f|_N) dP + N \cdot P(e) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot P(e) \end{aligned}$$

于是，如取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$，则当 $P(e) < \delta$ 时，由上式有

$$\left|\int_e f dP\right| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta = \varepsilon$$

定理12 （积分的完全可加性）设A具有σ-有限测度，且是可列个两两不相交的可测集的和集：

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

（1）如果f是A上的非负可测函数，则有

$$\int_A f dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f dP \tag{2.27}$$

（2）如果f在A上可积，则（2.27）成立。

证 （1）设 $f \geqslant 0$，则由积分的有限可加性有

$$\int_A f dP \geqslant \int_{\sum_{k=1}^{n} A_k} f dP = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f dP$$

令 $n \to \infty$即得

$$\int_A f dp \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f dp \tag{2.28}$$

设$\{B_n\}$是A的单调测度有限覆盖，易知

$$\left\{B_n \cap \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)\right\}$$

也是A的单调测度有限覆盖，根据积分的有限可加性有

$$\int_{B_n\cap(\sum_{k=1}^{n} A_k)} fdP = \sum_{k=1}^{n}\int_{B_n\cap A_k} fdP$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} fdP$$

令 $n\to\infty$，便得到

$$\int_A fdP\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} fdP \qquad (2.29)$$

由（2.28）与（2.29）即得（2.27）

（2）设f是A上任意符号的可测函数，由于前面已证（2.27）对非负可测函数成立，故有

$$\int_A f^+dP = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f^+dP$$

$$\int_A f^-dP = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f^-dP$$

由于f在A上可积，故上述二等式的左方是有限的（因此右方是收敛的正项级数）．作此二等式的差即得（2.27）．

定理13 设A具有σ-有限测度，且是可列个两两不相交的可测集的和集：

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

如果f在每个A_k上可积，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}|f|dP < +\infty \qquad (2.30)$$

则f在每个A_k可积，且（2.27）成立。

证 仿照（2.29）的证明可知

$$\int_A |f|dP\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}|f|dP \qquad (2.31)$$

由（2.30）与（2.31）即知$|f|$在A上可积，从而f也在A上可积。再由定理12即得（2.27）．

习　题　4.2

1，设 $P(A)<\infty$，f 是A上的非负可测函数，下式是否成立：

$$\int_A f dP = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}P\left(A\left(\frac{k}{n}\leqslant f<\frac{k+1}{n}\right)\right)$$

2，设 $P(A)<\infty$，f 是A上的实值函数，令

$$[f(\omega)]_n=\begin{cases} f(\omega)，当\ |f(\omega)|\leqslant n \\ n，当\ f(\omega)>n \\ -n，当\ f(\omega)<-n \end{cases}$$

当 f 在A上可积时，下式是否成立：

$$\int_A f dP = \lim_{n\to\infty}\int_A [f]_n dP$$

3．设$P(A)<\infty$，f 是A上的非负实值可测函数，令

$$f_n(\omega)=\begin{cases} f(\omega)，当\ f(\omega)\leqslant n \\ 0，当\ f(\omega)>n \end{cases}$$

下式是否成立：

$$\int_A f dP = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n dP$$

4．设A是具有σ-有限测度的集，$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖，f 是A上的可测函数，如果f在每个A_n上可积，且极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f dP$$

存在且有限，f 是否在A上可积？

5．设$P(A)<\infty$，f 是定义在A上的非负实值可测函数，φ为任一满足条件 $0\leqslant\varphi(\omega)\leqslant f(\omega)(\omega\in A)$的简单函数，则

$$\int_A f dP = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_A \varphi dP$$

6．定理13中的条件（2.30）不能改为级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f dP$$

收敛。

7. 设f在A上可积，而φ是A上的有界可测函数，则$\varphi\cdot f$在A上也可积。

8. 设 $P(A)<\infty$，证明A上的非负可测函数为可积的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP(A(n\leqslant f<n+1))<+\infty$$

9. 设A具有σ-有限测度，f在A上可积，证明

$$\lim_{n\to\infty} P(A(|f|\geqslant n))=0$$

10. 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是全σ-有限的测度空间，f是Ω上的非负可测函数，$A\in\mathscr{F}$，令

$$m(A)=\int_A fdP,\ m(\phi)=0$$

则$m(A)$是$\mathscr{F}$上的测度，$m(A)$是否全σ-有限？

11. 设A是具有σ-有限测度的集，f是A上的可测函数，g是A上的可积函数，且

$$-\infty<a\leqslant f\leqslant b<+\infty$$

则存在常数 $c\in[a, b]$使

$$\int_A f|g|dP=c\int_A |g|\,dP$$

§4·3 积分的极限定理

本节主要讨论积分和极限交换次序的问题，这个问题在近代分析数学中具有重要意义。

定理1（勒贝格） 设A是具有σ-有限测度的集，$\{f_n\}$是在A上度量收敛于f的可测函数列。如果存在A上的可积函数Φ，使得

$$|f_n|\leqslant\Phi\quad(n=1,2,\cdots)\tag{3.1}$$

则f在A上可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n dP=\int_A fdP\tag{3.2}$$

这个定理称为控制收敛定理，Φ称为控制函数。

证 首先，根据§ 4.2 定理 8 知，条件（3.1）保证了每个f_n的可积性。由于$f_n \Rightarrow f$，根据黎斯定理，$\{f_n\}$有子列$\{f_{n_k}\}$在A上几乎处处收敛于f，于是由

$$|f_{n_k}| \dot{\leqslant} \Phi$$

可知

$$|f| \dot{\leqslant} \Phi \tag{3.3}$$

故$|f|$在A上可积，从而f也可积，剩下的是证明(3.2)成立。

设$\{A_n\}$是A的单调测度有限覆盖，根据（3.1）及§ 4.2 定理 6，不妨设Φ非负。由于Φ可积，故对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数k，使得

$$0 \leqslant \int_A \Phi dP - \int_{A_k} [\Phi]_k dP < \frac{\varepsilon}{5}$$

由此有

$$0 \leqslant \int_{A-A_k} \Phi dP < \frac{\varepsilon}{5} \tag{3.4}$$

又根据积分的绝对连续性，存在$\delta>0$，使当可测集$e \subset A$且$P(e)<\delta$时，有

$$\int_e \Phi dP < \frac{\varepsilon}{5} \tag{3.5}$$

由于$f_n \Rightarrow f$，故对于上述A_k和δ，存在正整数N，使得当$n \geqslant N$时，

$$P\left(A_k\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{5P(A_k)}\right)\right) < \delta \tag{3.6}$$

记

$$A_{kn} = A_k\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{5P(A_k)}\right)$$

则当$\omega \in A_k - A_{kn}$时，

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{\varepsilon}{5P(A_k)}$$

于是有

$$\int_{A_k - A_{kn}} |f_n - f| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{5P(A_k)} \cdot P(A_k)$$

$$= \frac{\varepsilon}{5} \tag{3.7}$$

$$\int_{A_{kn}} \Phi dP < \frac{\varepsilon}{5} \tag{3.8}$$

由于

$$A = A_{kn} + (A_k - A_{kn}) + (A - A_k)$$

故由（3.4）（3.7）与（3.8）知，当$n \geqslant N$时，有

$$\left| \int_A f_n dP - \int_A f dP \right| \leqslant \int_A |f_n - f| \, dP$$

$$= \int_{A-A_k} |f_n - f| dP + \int_{A_{kn}} |f_n - f| dP$$

$$+ \int_{A_k - A_{kn}} |f_n - f| dP$$

$$\leqslant 2\int_{A-A_k} \Phi dP + 2\int_{A_{kn}} \Phi dP + \frac{\varepsilon}{5P(A_k)} \cdot P(A_k)$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

即（3.2）式成立。

定理2　设A是具有σ-有限测度的集，$\{f_n\}$是在A上几乎处处收敛于f的可测函数列．如果存在A上的可积函数Φ，使得

$$|f_n| \overset{\cdot}{\leqslant} \Phi \quad n = 1, 2, \cdots$$

则f在A上可积，且

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n dP = \int_A f dP$$

这是几乎处处收敛条件下的控制收敛定理。

证　仿照定理1可证f的可积性。我们注意到，在证明(3.2)时所用到的实际上是固定集A_k上的依测度收敛。由于

A_k 具有有限测度，故由 $\{f_n\}$ 在A上的几乎处处收敛可推出 $\{f_n\}$在 A_k 上依测度收敛，因而定理1中的证明在本定理的假设下也是适用的。

推论 设 $P(A)<\infty$，$\{f_n\}$ 是在A上几乎处处(或按测度)收敛于可测函数 f 的可测函数列。如果存在常数 k，使得

$$|f_n|\leqslant k,\ n=1,2,\cdots$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n dP=\int_A f dP$$

这个推论称为**有界收敛定理**。

证 取$\Phi\equiv k$作为定理1与2中的控制函数，由于$P(A)<\infty$，故Φ是可积的。于是由定理1与2可知，推论显然成立。

引理1 设 f_n 与 f 是定义在集A上的非负函数，如果

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\omega_0)=f(\omega_0)$$

则对于所有的正整数N，有

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(\omega_0)]_N=[f(\omega_0)]_N$$

证 如果 $f(\omega_0)>N$，则当 n 充分大时，$f_n(\omega_0)>N$，因而

$$[f_n(\omega_0)]_n=N=[f(\omega_0)]_N$$

如果 $f(\omega_0)<N$，则当 n 充分大时，$f_n(\omega_0)<N$，因而

$$[f_n(\omega_0)]_N=f_n(\omega_0)\to f(\omega_0)=[f(\omega_0)]_N$$

如果 $f(\omega_0)=N$，则对于任给的正数 ε，存在正整数 n_0，使得当$n>n_0$时，

$$f_n(\omega_0)>N-\varepsilon$$

因而

$$N-\varepsilon<[f_n(\omega_0)]_N\leqslant N$$

故

$$0\leqslant[f(\omega_0)]_N-[f_n(\omega_0)]_N<\varepsilon\quad(n>n_0)$$

定理 3 （勒维（Levy）） 设A是具有σ-有限测度的集，$f_n(n=1,2,\cdots)$是A上的非负可测函数列，如果

$$f_1(\omega)\leqslant f_2(\omega)\leqslant f_3(\omega)\leqslant\cdots \tag{3.9}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega) \tag{3.10}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n dP=\int_A f dP \tag{3.11}$$

证 由（3.9）知，极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n dP=k$$

存在。如果 $k=+\infty$，则由 $f\geqslant f_n$ 知，$\int_A f dP$ 亦为$+\infty$，故（3.11）成立。

下面考虑$k<+\infty$的情况。对于任何正整数N，显然有

$$0\leqslant[f_n]_N\leqslant[f]_N,\quad n=1,2,\cdots$$

又根据引理 1 有

$$\lim_{n\to\infty}[f_n]_N=[f]_N$$

由于 $0\leqslant[f_n]_N\leqslant N$，$P(A_N)<\infty$，故根据有界收敛定理有

$$\int_{A_N}[f]_N dP=\lim_{n\to\infty}\int_{A_N}[f_n]_N dP\leqslant k$$

再令$N\to\infty$，便知f在A上可积，由于

$$0\leqslant f_n\leqslant f\quad(n=1,2,\cdots)$$

故f可作为控制函数，于是由定理 2 即得（3.11）。

定理 4 设A是具有σ-有限测度的集，$u_k(k=1,2,\cdots)$是A上的非负可测函数，如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\omega)=f(\omega)$$

则

$$\int_A f dP=\sum_{k=1}^{\infty}\int_A u_k dP$$

证 令

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

并应用勒维定理即得。

定理5 (法都(Fatou)) 设A是具有σ-有限测度的集，$f_n(n=1,2\cdots)$是A上的非负可测函数列，则

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} f_n dP \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n dP \tag{3.12}$$

证 令

$$u_n(\omega) = \inf\{f_n(\omega),\ f_{n+1}(\omega),\ f_{n+2}(\omega),\ \cdots\}$$

则对任何n，有

$$u_n(\omega) \leqslant f_n(\omega) \tag{3.13}$$

$$0 \leqslant u_1(\omega) \leqslant u_2(\omega) \leqslant \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\omega) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(\omega)$$

于是对函数列$\{u_n\}$应用勒维定理，得

$$\int_A \lim_{n\to\infty} u_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_A u_n dP$$

即

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} f_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_A u_n dP \tag{3.14}$$

由(3.13)有

$$\int_A u_n dP \leqslant \int_A f_n dP$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \int_A u_n dP \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n dP \tag{3.15}$$

于是由(3.14)与(3.15)即得(3.12)。

习 题 4.3

1. 举例说明，如果没有条件(3.1)，定理1的结论不成立。

2. 举例说明，如没有 $P(A)<\infty$ 的条件，定理 1 与 2 的推论不成立。

3. 控制函数的存在是否是（3.2）中积分与极限交换次序的必要条件？

4. 设 $\Phi(x)$ 与 $f_n(x)$ （$n=1, 2, \cdots$）是区间 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数，

$$|f_n(x)|\leqslant\Phi(x),\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

在 $[a, b]$ 上处处成立，且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad x\in[a,\ b]$$

（1）$f(x)$ 是否黎曼可积？

（2）在 $f(x)$ 黎曼可积的条件下，下式是否成立：

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx$$

5. 在定理 4 的条件下，如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_A u_k dP<\infty$$

则等式

$$\lim_{n\to\infty} u_k(\omega)=0$$

在 A 上几乎处处成立。

6. 设 A 是具有 σ-有限测度的集，f_n（$n=1, 2\cdots$）是 A 上的一列可积函数，如果有 A 上的一个可积函数 g，使得 $f_n\leqslant g$，且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_A f_n dP>-\infty$$

则函数 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ 在 A 上可积，且

$$\int_A \overline{\lim_{n\to\infty}} f dP\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_A f_n dP$$

7. 设 A 是具有 σ-有限测度的集，f_n 是在 A 上收敛于 f 的可测函数列，如果存在常数 k，使

$$\int_A |f_n|\, dP<k \quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

则 f 在 A 上可积。

8. 举例说明法都定理（3.12）式中的等号未必成立。

9. 设 Ω 是自然数的全体，$\mathscr{F}$ 是 Ω 中一切子集的全体，$A\in\mathscr{F}$ 时，规定 $P(A)=A$ 中自然数的个数，则定义在 Ω 上的函数 f 在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$$

且在此条件满足时，有

$$\int_{\Omega} f dP=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

10. 利用上题的结论并应用控制收敛定理证明：设

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} \quad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

是一列级数，且极限

$$x_n=\lim_{m\to\infty} x_{mn}$$

存在（有限）。如果又存在另外一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$，使对每个 n，有

$$|x_{mn}|\leqslant y_n \quad (m=1,2,\cdots)$$

则对每个 m，$\sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也绝对收敛，且

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty} x_{mn}$$

注：从以上两题可以看到，用关于一般测度的积分概念可以将过去数学分析中的积分和级数问题统一起来处理。

§4·4 勒贝格-斯提杰积分

勒贝格积分的重要推广是勒贝格-斯提杰积分（简称 L-S 积分），它是§4.1与§4.2中所定义的抽象空间上的积分的一个特殊情况。

定义 1　设 $F(x)$ 是给定的分布函数，P 是由它引出的勒贝格-斯提杰测度。R 是实数的全体，$\overline{\mathscr{B}}$ 是 R 中的波莱尔集类 $\mathscr{B}$ 对 P 的完全化（在需要强调 P、$\overline{\mathscr{B}}$ 与 $F(x)$ 有关时，分别将它们改记为 P_F 与 $\overline{\mathscr{B}}(F)$），$A\in\overline{\mathscr{B}}$，$f(x)$ 是定义在 A 上的广义实值函数，如果 $f(x)$ 对测度空间（R，$\overline{\mathscr{B}}$，P）可测，并且积分 $\int_A f(x)dP$ 存在，则称此积分为 $f(x)$ 在 A 上的勒贝格-斯提杰积分，并记之为

$$(L-S)\int_A f(x)dF(x) \tag{4.1}$$

如果此积分是一有限数，则称 $f(x)$ 关于 $F(x)$ 勒贝格-斯提杰可积。

在 A 为区间情况的下列积分（略去了被积表达式和前面的记号 $L-S$）

$$\int_{(a;b]},\ \int_{[a;b]},\ \int_{(a;b)},\ \int_{[a;b)},\ \int_R$$

也分别记为

$$\int_{a+0}^{b+0},\ \int_{a-0}^{b+0},\ \int_{a+0}^{b-0},\ \int_{a-0}^{b-0},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tag{4.2}$$

类似可以理解下列记号：

$$\int_{a-0}^{+\infty},\ \int_{a+0}^{+\infty},\ \int_{-\infty}^{a-0},\ \int_{-\infty}^{a+0} \tag{4.3}$$

如果 $F(x)\equiv x+c$，则（4.1）就是通常的勒贝格积分。

在实变函数论中我们知道，在被积函数连续的情况下，勒贝格积分可归结为黎曼积分来计算。与此类似，在这种情况下，勒贝格-斯提杰积分也可归结为所谓黎曼-斯提杰积分（简称 $R-S$ 积分）来计算。

定义 2　设 $f(x)$ 与 $F(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的两个实值函数，其中 $F(x)$ 是增函数，在 $[a, b]$ 中任意插入若干分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

来划分区间$[a,b]$，记这一分法为Δ，在每个区间$[x_{k-1}, x_k]$中任取一点 ξ_k 作和

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

令

$$\lambda(\Delta) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1})$$

如果当 $\lambda(\Delta) \to 0$ 时，不论分法如何，也不论ξ_k 的取法如何，σ有有限的极限I，则称这个极限I为$f(x)$关于$F(x)$在区间$[a,b]$上的黎曼-斯提杰积分，记为

$$(R-S)\int_a^b f(x)dF(x) = I$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

确切地说，R-S 积分的定义是：如果对于任一正数ε，都存在正数δ，使得当 $\lambda(\Delta) < \delta$ 时，不管分法如何，ξ_k 的取法如何，不等式

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

恒成立，则称I为$f(x)$关于 $F(x)$ 在$[a,b]$上的黎曼-斯提杰积分。

当$F(x) \equiv x + c$ 时，黎曼-斯提杰积分显然就是黎曼积分。

黎曼-斯提杰积分具有以下性质（以下略去了积分号前的记号 R-S）

（1）$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dF(x) = \int_a^b f_1(x)dF(x) + \int_a^b f_2(x)dF(x)$$

（2）$$\int_a^b f(x)d(F_1(x) + F_2(x)) = \int_a^b f(x)dF_1(x) + \int_a^b f(x)dF_2(x)$$

（3）如果k与l是两个常数，则

$$\int_a^b kf(x)d[lF(x)] = kl\int_a^b f(x)dF(x)$$

以上三式之意是：当右边积分存在时，左边积分也存在，且两边相等。

（4）如果 $a<c<b$ 且下面三个积分都存在，则

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^c f(x)dF(x) + \int_c^b f(x)dF(x)$$

（5）如果 $f(x)$在$[a, b]$中连续，则$\int_a^b f(x)\ dF(x)$存在。

（6）如果$f(x)$在 $[a,b]$中 连续，而 $F(x)$ 处处具有有限导数$F'(x)$，且 $F'(x)$黎曼可积，则

$$(R-S)\int_a^b f(x)dF(x) = (R)\int_a^b f(x)F'(x)dx$$

当积分区间无限时，也可以按通常方式来定义广义 黎 曼-斯提杰积分。

定义 3 设 $f(x)$与 $F(x)$是定义在$(-\infty, +\infty)$上的实值函数，其中 $F(x)$单增，如果对于任何 $a<b$，积分$\int_a^b f(x)dF(x)$存在，且极限

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}(R-S)\int_a^b f(x)dF(x) = I \qquad (4.4)$$

存在，则称此极限为 $f(x)$关于 $F(x)$在$(-\infty, +\infty)$上的**广义黎曼-斯提杰积分**，记为

$$I = (R-S)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \qquad (4.5)$$

如果 I 有限，则称积分（4.5）收敛。

如果

$$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dF(x) < +\infty$$

则称积分（4.5）绝对收敛。

仿照广义黎曼积分的情况可以证明，如果积分（4.5）绝对收敛，则它也收敛。

易知，如果 $f(x)\geqslant 0$，且对任何 $a<b$，$(R-S)\int_a^b f(x)$

$dF(x)$ 存在，则积分$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dF(x)$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}(R-S)\int_{-n}^{n}f(x)dF(x)=I<+\infty$$

且当此条件满足时

$$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dF(x)=I$$

定理1 设 $F(x)$是分布函数，$f(x)$在有限区间$[a,b]$上连续，则

$$(L-S)\int_{(a,b]}f(x)dF(x)=(R-S)\int_{a}^{b}f(x)dF(x)$$

证 由假设知，上式两边的积分都存在。将$[a,b]$$n$等分，得分法

$$\Delta_n:\ a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}=b$$

在区间$(a, b]$上定义函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 如下：

$$f_n(x)=f(x_k^{(n)}),\ 当\ x\in(x_{k-1}^{(n)},\ x_k^{(n)}]$$

$$k=1,2,\cdots,n$$

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，故存在$M>0$，使得

$$|f_n(x)|\leqslant M,x\in(a,b],n=1,2,\cdots$$

且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in(a,b]$

设P是由 $F(x)$ 引出的勒贝格–斯提杰测度，根据有界收敛定理及 R–S 积分的定义有

$$\begin{aligned}(L-S)\int_{(a,b]}f(x)dF(x)&=\lim_{n\to\infty}\int_{(a,b]}f_n(x)dF(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^{(n)})P((x_{k-1}^{(n)},\ x_k^{(n)}])\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^{(n)})[F(x_k^{(n)})-F(x_{k-1}^{(n)})]\\&=(R-S)\int_{a}^{b}f(x)dF(x)\end{aligned}$$

推论1 在定理1的假设下，有

$$(L-S)\int_{[a,b]}f(x)dF(x)$$

$$= (R-S)\int_a^b f(x)dF(x) + f(a)[F(a)-F(a-0)]$$

证　这是因为

$$(L-S)\int_{[a,b]} = (L-S)\int_{(a,b]}$$

$$+ (L-S)\int_{\{a\}} f(x)dF(x)$$

而

$$(L-S)\int_{\{a\}} f(x)dF(x) = F(a)P(\{a\})$$

$$= f(a)[F(a)-F(a-0)]$$

推论 2　设$F(x)$是分布函数，$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，则$f(x)$关于$F(x)$勒贝格-斯提杰可积的充要条件是$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)$绝对收敛，且在此条件满足时有

$$(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) = (R-S)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \tag{4.6}$$

证　因为就勒贝格-斯提杰积分而言，可积性和绝对可积性是等价的，故有

$$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dF(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(R-S)\int_{-n}^{n} |f(x)|dF(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(L-S)\int_{[-n,n]} |f(x)|dF(x)$$

$$= (L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dF(x) < \infty$$

因此必要性成立；因为上式每一步均可逆推，故充分性也成立。

引理 1　设f是定义在测度空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的实值可测函数，对于每个$B\in\mathscr{B}$，令

$$\mu(B) = P(f^{-1}(B)) \tag{4.7}$$

则μ是$\mathscr{B}$上的测度。

证　显然$\mu(B)\geq 0$。设$B_n(n=1,2,\cdots)$是$\mathscr{B}$中的互不相交

的集，则$f^{-1}(\mathscr{B}_n)$是$\mathscr{F}$中互不相交的集，于是

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)=P\left(f^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)=P\left(\sum_{n=1}^{\infty}f^{-1}(B_n)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(f^{-1}(B_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$$

即μ具有可列可加性，因此它是$\mathscr{B}$上的测度。

定义4 设μ是由（4.7）所定义的测度，则称测度空间（R，$\mathscr{B}$，μ）为**可测函数f引入的测度空间**。μ所确定的分布函数$F(x)$也称为f的**分布函数**。如果μ为有限测度，则

$$F(x)=\mu((-\infty,x])=P(f^{-1}((-\infty,x]))=P(f\leqslant x)$$

是f的一个分布函数。

下面定理称为积分转化定理，它把一般抽象空间上积分转化为比较具体、易于研究的$(L-S)$积分，这个定理在概率论中起着重要作用。

定理2 设f是有限测度空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）上的实值可测函数；（R，$\mathscr{B}$，μ）是f引入的测度空间，$F(x)$是f的分布函数，g是波莱尔可测函数，如果积分$\int_{\Omega}g(f(\omega))dP$和$(L-S)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x)$中有一个存在，则另一个也存在，且

$$\int_{\Omega}g(f(\omega))dP=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x) \qquad (4.8)$$

证 分以下四步来讨论：

1°. 设$B\in\mathscr{B}$，令

$$g(x)=\chi_B(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in B\\ 0, & 当\ x\in B'\end{cases}$$

则

$$\int_{\Omega}g(f(\omega))dP=P(f^{-1}(B))$$

又

$$(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x)=\int_{B}g(x)dF(x)$$

$$+\int_{B'}g(x)dF(x)$$

$$=\mu(B)=P(f^{-1}(B))$$

比较以上二式即得（4.8）。

2°．设$g(x)$是非负简单函数，即设

$$g(x)=a_k,\quad x\in B_k,\quad k=1,2,\cdots,n$$

其中$a_k\geqslant 0$,

$$B_k\in\mathscr{B},\quad \sum_{k=1}^{n}B_k=R$$

则当 $\omega\in f^{-1}(B_k)$ 时有

$$g(f(\omega))=a_k,\quad k=1,2,\cdots,n$$

所以

$$\int_\Omega g(f(\omega))dP=\sum_{k=1}^{n}a_kP(f^{-1}(B_k))$$

又

$$(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{B_k}g(x)dF(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\mu(B_k)=\sum_{k=1}^{n}a_kP(f^{-1}(B_k))$$

比较以上二式即得（4.8）。

3°．设 $g(x)$是非负波莱尔可测函数，则存在非负简单函数的增序列 $g_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x),\quad x\in R$$

于是

$$g_1(f(\omega))\leqslant g_2(f(\omega))\leqslant g_3(f(\omega))\leqslant\cdots,\quad \omega\in\Omega$$

且

$$\lim_{n\to\infty}g_n(f(\omega))=g(f(\omega)),\quad \omega\in\Omega$$

易知$g_n(f(\omega))$是（Ω，$\mathscr{F}$）上的简单函数，于是由2°有

$$\int_\Omega g_n(f(\omega))dP=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}g_n(x)dF(x)$$

又由勒维定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} g_n(f(\omega))dP=\int_{\Omega} g(f(\omega))dP$$

$$\lim_{n\to\infty}(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dF(x)=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$$

由以上三式即得（4.8）。

4°．设 $g(x)$是任意符号的可测函数，且

$$g(x)=g^+(x)-g^-(x)$$

易知$g(f(\omega))$的正部与负部分别可表示为$g^+(f(\omega))$与$g^-(f(\omega))$，由3°知

$$\int_{\Omega} g^+(f(\omega))dP=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g^+(x)dF(x)$$

$$\int_{\Omega} g^-(f(\omega))dP=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g^-(x)dF(x)$$

由以上二式知，如果积分$\int_{\Omega} g(f(\omega))dP$与积分$(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$中有一个存在，则另一个也存在，且从第一式减去第二式即得（4.8）。

推论1 设$\xi(\omega)$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,$F(x)$是其分布函数，g 是波莱尔可测函数，则 $g(\xi)$ 的数学期望可以表为

$$Eg(\xi)=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) \tag{4.9}$$

其中假定（4.9）中有一边存在即可。

推论2 设 $\xi(\omega)$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量，$F(x)$是其分布函数，g 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，则 $g(\xi)$的数学期望存在且有限的充要条件是积分

$$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x) \tag{4.10}$$

绝对收敛，且当（4.10）绝对收敛时有

$$Eg(\xi)=(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$$

习 题 4·4

1. 设$f(x)\equiv1$，求（4.2）中任两个积分的差。

2. 设$f(x)\equiv1$，求（4.3）中任两个积分的差。

3. 设 $a<c<b$，证明由$(R\text{-}S)\int_a^b f(x)dF(x)$的存在可推出$(R\text{-}S')$ $\int_a^c f(x)dF(x)$与$\int_c^b f(x)dF(x)$的存在，但其逆不真。

4. 设$f(x)$在$[a, b]$上是连续的，而$F(x)$是$[a, b]$上的阶梯函数，即存在$[a, b]$的分法：

$$a=c_0<c_1<\cdots<c_n<c_{n+1}=b$$

使得$F(x)$在区间(c_{k-1}, c_k) $(k=1,2,\cdots,n+1)$中取常值，证明

$$\int_a^b f(x)dF(x)=f(a)[F(a+0)-F(a)]$$

$$+f(b)[F(b)-F(b-0)]+\sum_{k=1}^{n}f(c_k)[F(c_k+0)-F(c_k-0)]$$

5. 设$f(x)$是定义在$[a, b]$上的有界实值函数，$F(x)$是定义在$[a, b]$上的单增函数，

Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

是$[a, b]$的任一分法，令

$$M_k=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{k-1}, x_k]\}$$

$$\omega_k=M_k-m_k$$

$$\Delta F(x_k)=F(x_k)-F(x_{k-1})$$

则$(R\text{-}S)\int_a^b f(x)dF(x)$存在的充要条件是

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta F(x_k)=0$$

6. 在上题关于$f(x)$与$F(x)$的假设下，证明$(R\text{-}S)\int_a^b f(x)dF(x)$存在的必要条件是$f(x)$在$g(x)$的所有间断点连续。

7. 在定理 1 的条件下，用 R-S 积分和L-S 测度表示下列积分：

（1） $(L\text{-}S)\displaystyle\int_{(a,b)} f(x)dF(x)$；

（2） $(L\text{-}S)\displaystyle\int_{[a,b)} f(x)dF(x)$。

8. 如果将 $(R\text{-}S)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)$ 绝对收敛的条件改为通常的收敛，定理 1 的推论 3 的结论是否成立？

第五章　乘积空间

§5·1　乘积测度

定义1　设 Ω_1，Ω_2 是任意给定的两个空间，$A_1\subset\Omega_1$，$A_2\subset\Omega_2$分别为Ω_1与Ω_2的非空子集、则称一切有序点偶(ω_1, ω_2)（其中$\omega_1\in A_1$，$\omega_2\in A_2$）的全体所组成的集为A_1与A_2的积集，记为$A_1\times A_2$，即

$$A_1\times A_2=\{(\omega_1,\omega_2)\mid \omega_1\in A_1,\omega_2\in A_2\}$$

如果A_1与A_2中有一个是空集ϕ，则定义$A_1\times A_2=\phi$。

积集$\Omega_1\times\Omega_2$也称为乘积空间，并称 $A_1\times A_2$为$\Omega_1\times\Omega_2$中的矩形，A_1，A_2则称为矩形$A_1\times A_2$的边。

(ω_1, ω_2)也称为$\Omega_1\times\Omega_2$中的点，其中$\omega_1\in\Omega_1$和$\omega_2\in\Omega_2$分别称为这个点的第一坐标和第二坐标。

例1　设R表示数直线，则$R\times R$就是实平面，通常用R^2表示。

例2　设$\Omega_1=\{1,2,3\}$，$\Omega_2=\{a,b\}$。则

$$\Omega_1\times\Omega_2=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

乘积空间中的矩形具有下面的一些性质。

引理1　如果$A=A_1\times A_2$，$B=B_1\times B_2$都是非空矩形，则$A\subset B$的充要条件是$A_1\subset B_1$，$A_2\subset B_2$。

证　充分性是显然的，下面证必要性。设 $A\subset B$，如果$A_1\subset B_1$，$A_2\subset B_2$ 中有一个不成立，例如 $A_1\subset B_1$ 不成立，则存在$\omega_1^*\in A_1$而$\omega_1^*\notin B_1$，由于$A=A_1\times A_2$非空，故存在$\omega_2^*\in A_2$，

于是 $(\omega_1^*, \omega_2^*)\in A$，而 $(\omega_1^*, \omega_2^*)\notin B$，这与假设 $A\subset B$ 矛盾，所以必须有$A_1\subset B_1$，同样$A_2\subset B_2$。

推论 在引理的条件下，$A=B$ 的充要条件是 $A_1=B_1$，$A_2=B_2$。

引理 2

$$(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2) \tag{1.1}$$

证 $(\omega_1, \omega_2)\in(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)$

$\Longleftrightarrow(\omega_1, \omega_2)\in A_1\times A_2$且$(\omega_1, \omega_2)\in B_1\times B_2$

$\Longleftrightarrow\omega_1\in A_1$，$\omega_2\in A_2$且$\omega_1\in B_1$，$\omega_2\in B_2$

$\Longleftrightarrow\omega_1\in A_1$，$\omega_1\in B_1$且$\omega_2\in A_2$，$\omega_2\in B_2$

$\Longleftrightarrow\omega_1\in A_1\cap B_1$且$\omega_2\in A_2\cap B_2$

$\Longleftrightarrow(\omega_1, \omega_2)\in(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$

∴ (1.1) 式成立。

引理 3

$$(A_1+B_1)\times(A_2+B_2)=A_1\times A_2+A_1\times B_2+B_1\times A_2+B_1\times B_2 \tag{1.2}$$

(1.2)式的成立是显然的，此式表明积对于直和是可分配的。

引理 4

$$\begin{aligned}&(A_1\times A_2)-(B_1\times B_2)\\&=(A_1\cap B_1)\times(A_2-B_2)+(A_1-B_1)\times(A_2\cap B_2)\\&\quad+(A_1-B_1)\times(A_2-B_2)\end{aligned} \tag{1.3}$$

证 $(A_1\times A_2)-(B_1\times B_2)$

$=(A_1\times A_2)-(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)$

$=(A_1\times A_2)-(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$ （由引理 2）

$=[(A_1\cap B_1)+(A_1-B_1)]\times[(A_2\cap B_2)$

$$+(A_2-B_2)]-(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$$

$$=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)+(A_1\cap B_1)\times(A_2-B_2)$$

$$+(A_1-B_1)\times(A_2\cap B_2)+(A_1-B_1)\times(A_2-B_2)$$

$$-(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)\quad（由引理 3）$$

$$=(A_1\cap B_1)\times(A_2+B_2)+(A_1-B_1)$$

$$\times(A_2\cap B_2)+(A_1-B_1)\times(A_2-B_2)$$

引理 5 如果集类$\mathscr{F}$对差与直和运算封闭，则$\mathscr{F}$是环。

证 因为

$$A\cup B=A+(B-A)$$

故如果$\mathscr{F}$为差与直和运算封闭，则$\mathscr{F}$也对和运算封闭，因而$\mathscr{F}$是环。

定理 1 设$\mathscr{F}_1$与$\mathscr{F}_2$分别是 Ω_1与Ω_2 的某些子集所构成的环。则由有限个互不相交的形如$A_1\times A_2$($A_1\in\mathscr{F}_1$, $A_2\in\mathscr{F}_2$)的矩形的和集的全体所组成的类$\mathscr{F}$是一个环。

证 $\mathscr{F}$对直和封闭是显然的，由此根据引理 4 知，$\mathscr{F}$对差也是封闭的，于是由引理 5 知$\mathscr{F}$是环。

定理 1 中的环$\mathscr{F}$ 也记为 $\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$。

定义 2 设$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$，$(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$是两个可测空间，记

$$\mathscr{A}=\{A_1\times A_2 \mid A_1\in\mathscr{F}_1,\ A_2\in\mathscr{F}_2\}$$

并用$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$表示包含$\mathscr{A}$的最小$\sigma$－代数，则称可测空间

$$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$$

为可测空间$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$与$(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$的乘积(可测)空间，$\mathscr{A}$中的集称为**可测矩形**。

定理 2 设$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$与$(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$是可测空间，则

$$\sigma(\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2})=\sigma(\mathscr{A})\tag{1.4}$$

证 由定理1，$\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$是包含$\mathscr{A}$的最小环，故$\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}\subset\sigma(\mathscr{A})$，因而$\sigma(\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2})\subset\sigma(\mathscr{A})$。另一方面，由于$\mathscr{A}\subset\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$，故又有$\sigma(\mathscr{A})\subset\sigma(\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2})$。从而(1.4)式成立。

定义3 设R表示数直线，$(R, \mathscr{B})$是一维波莱尔可测空间，则称$(R\times R, \mathscr{B}\times\mathscr{B})$为二维波莱尔可测空间。$\mathscr{B}\times\mathscr{B}$中的集称为二维波莱尔集，$(R\times R, \mathscr{B}\times\mathscr{B})$上的实值可测函数称为二元波莱尔可测函数。

二维波莱尔可测空间也可用记号$(R^2, \mathscr{B}_2)$表示。

定义4 设A与B是数直线R中任两个区间，则称$A\times B$为R^2中的区间（也称二维区间）。例如$[0,1]\times[1, 2]$，$(-\infty, 1]\times(0, +\infty)$都是$R^2$中的区间。

设

$$\mathscr{A}=\{(-\infty, a]\times(-\infty, b] \mid a, b\in R\}$$

仿照§1.2中的一维情况不难证明

$$\mathscr{B}_2=\sigma(\mathscr{A})$$

定义5 设$A\subset\Omega_1\times\Omega_2$，对于任意固定的$\omega_1\in\Omega_1$，称集

$$\{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2)\in A\}$$

为A的ω_1截口（或被ω_1决定的A的截口），并记为$A(\omega_1, \cdot)$。同样，对于任意固定的$\omega_2\in\Omega_2$，称

$$A(\cdot, \omega_2)=\{\omega_1 \mid (\omega_1, \omega_2)\in A\}$$

为A的ω_2截口。

由定义知，$A(\omega_1, \cdot)$是Ω_2的子集，$A(\cdot, \omega_2)$是Ω_1的子集。

引理6 设A_n，A，B都是$\Omega_1\times\Omega_2$的子集，则

(1) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)(\omega_1, \cdot)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n(\omega_1, \cdot)$；

(2) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)(\omega_1, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega_1, \cdot)$;

(3) $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)(\omega_1, \cdot) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(\omega_1, \cdot)$;

(4) $(A-B)(\omega_1, \cdot) = A(\omega_1, \cdot) - B(\omega_1, \cdot)$.

对于ω_2截口有相应的公式。

证明是显然的，留作习题。

定理 3 $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-可测集的每一个$\omega_1$截口是$\mathscr{F}_2$-可测集，每一个$\omega_2$截口是$\mathscr{F}_1$-可测集。

证 设$A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$，$A$的每一个$\omega_1$截口是$\mathscr{F}_2$-可测集，每一个$\omega_2$截口是$\mathscr{F}_1$-可测集，所有具有这种性质的集$A$所组成的类记为$\mathscr{F}$。由引理 6 知，$\mathscr{F}$是一$\sigma$-代数，又显然$\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$（$\mathscr{A}$是所有可测矩形所组成的类），从而$\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}$，因此$\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$中的每一个集的截口都是可测集。

定义 6 设$A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$，$f$是定义在$A$上的函数，当$\omega_1 \in \Omega_1$固定时，如果$A(\omega_1, \cdot)$不是空集，则称定义在$A(\omega_1, \cdot)$上的函数

$$f_{\omega_1}(\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2) \quad \omega_2 \in A(\omega_1, \cdot)$$

为f的ω_1截口（或被ω_1决定的f的截口）。同样，对于固定的$\omega_2 \in \Omega_2$，如果$A(\cdot, \omega_2)$不是空集，则称定义在$A(\cdot, \omega_2)$上的函数

$$f^{\omega_2}(\omega_1) = f(\omega_1, \omega_2) \quad \omega_1 \in A(\cdot, \omega_2)$$

为f的ω_2截口。

定理 4 设$A \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$，$f$是$A$上的可测函数，则$f$的每一个$\omega_1$截口是$\mathscr{F}_2$-可测函数，每一个$\omega_2$截口是$\mathscr{F}_1$-可测函数。

证 对于任何实数c和任何给定的$\omega_1 \in \Omega_1$有

$$\{\omega_2 \mid f_{\omega_1}(\omega_2) \leqslant c, \ \omega_2 \in A(\omega_1, \cdot)\}$$

$$= \{\omega_2 \mid f(\omega_1, \omega_2) \leqslant c, (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$
$$= \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A(f \leqslant c)\}$$

由此可知，上式中的集是$\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-可测集$A(f \leqslant c)$的$\omega_1$截口，因而是$\mathscr{F}_2$-可测集．于是就证明了$f_{\omega_1}$是$\mathscr{F}_2$-可测函数．类似地可以证明$f^{\omega_2}$是$\mathscr{F}_1$-可测函数．

引理7 设$(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$与$(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$是两个$\sigma$-有限的测度空间，$A \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$，则$P_2(A(\omega_1, \cdot))$是$\mathscr{F}_1$-可测函数，$P_1(A(\cdot, \omega_2))$是$\mathscr{F}_2$-可测函数，且

$$\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot))dP_1$$
$$= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2))dP_2 \tag{1.5}$$

证 先就$(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$与$(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$为有限的情形来证明．设$A \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$是具有定理中所述性质的任一集，$\mathscr{F}$是所有这种$A$所组成的类．下面我们证明$\mathscr{F}$具有以下性质：

（1）设$\mathscr{A}$是所有可测矩形组成的类，证明$\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$．

设$A = A_1 \times A_2 \in \mathscr{A}$，则

$$A(\omega_1, \cdot) = \begin{cases} A_2, & \omega_1 \in A_1 \\ \phi, & \omega_1 \notin A_1 \end{cases}$$

故

$$P_2(A(\omega_1, \cdot)) = \begin{cases} P_2(A_2), & \omega_1 \in A_1 \\ 0, & \omega_1 \notin A_1 \end{cases}$$

同理

$$P_1(A(\cdot, \omega_2)) = \begin{cases} P_1(A_1), & \omega_2 \in A_2 \\ 0, & \omega_2 \notin A_2 \end{cases}$$

这两个函数分别为Ω_1与Ω_2中的简单函数，因而分别$\mathscr{F}_1$-可测和$\mathscr{F}_2$-可测．显然有

$$\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1,\cdot))dP_1 = P_2(A_2)P_1(A_1)$$

$$= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot,\ \omega_2))dP_2 \tag{1.6}$$

故$A_1\times A_2\in\mathscr{F}$．特别有

$$\Omega_1\times\Omega_2\in\mathscr{F} \tag{1.7}$$

（2）证明对直和封闭。

设$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，$E=A+B$，则

$$P_2(E(\omega_1,\cdot)) = P_2(A(\omega_1,\ \cdot)+B(\omega_1,\ \cdot))$$

$$= P_2(A(\omega_1,\ \cdot)) + P_2(B(\omega_1,\ \cdot))$$

因为$P_2(A(\omega_1,\ \cdot))$，$P_2(B(\omega_1,\ \cdot))$为$\mathscr{F}_1$-可测，故$P_2(E(\omega_1,\ \cdot))\mathscr{F}_1$-可测。同理

$$P_1(E(\cdot,\ \omega_2)) = P_1(A(\cdot,\ \omega_2)) + P_1(B(\cdot,\ \omega_2))$$

$\mathscr{F}_2$-可测．由于$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，故

$$\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1,\ \cdot))dP_1 = \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot,\ \omega_2))dP_2$$

$$\int_{\Omega_1} P_2(B(\omega_1,\ \cdot))dP_1 = \int_{\Omega_2} P_1(E(\cdot,\ \omega_2))dP_2$$

于是根据积分的线性性，由以上四式即得

$$\int_{\Omega_1} P_2(E(\omega_1,\ \cdot))dP_1 = \int_{\Omega_2} P_1(E(\cdot,\ \omega_2))dP_2$$

所以$E\in\mathscr{F}$．

由归纳法知，如果$A_k\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots,n)$且$A=\sum_{k=1}^{n}A_k$，则$A\in\mathscr{F}$．

（3）证明$\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}\subset\mathscr{F}$。

这是（1）与（2）的直接推论。

（4）证明$\mathscr{F}$是单调类。

设$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，且

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots$$

记 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，由于

$$A_1(\omega_1, \cdot) \subset A_2(\omega_1, \cdot) \subset A_3(\omega_1, \cdot) \subset \cdots$$

$$A(\omega_1, \cdot) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(\omega_1, \cdot)$$

所以

$$P_2(A(\omega_1, \cdot)) = \lim_{n \to \infty} P_2(A_n(\omega_1, \cdot))$$

又因为

$$P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) \leqslant P_2(\Omega_2)$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

故由有界收敛定理有

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_1} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1$$

$$= \int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1 \qquad (1.8)$$

类似有

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_2} P_1(A_n(\cdot, \omega_2)) dP_2$$

$$= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2 \qquad (1.9)$$

由假设

$$\int_{\Omega_1} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1$$

$$= \int_{\Omega_2} P_1(A_n(\cdot, \omega_2)) dP_2$$

故由(1.8)与(1.9)有

$$\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1, \cdot)) dP_1$$

$$= \int_{\Omega_2} P_1(A(\cdot, \omega_2)) dP_2$$

因此$A\in\mathscr{F}$。类似可证，如果$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，且

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$$

则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$。因而$\mathscr{F}$是单调类。

设$\mathscr{M}(\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2})$是包含$\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$的最小单调类，则

$$\mathscr{M}(\widehat{\mathscr{F}\times\mathscr{F}_2})\subset\mathscr{F}$$

由§1.2的定理5知

$$\mathscr{M}(\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2})=\sigma(\widehat{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2})=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$$

故$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}$。从而$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2=\mathscr{F}$。

下面我们就$(\Omega_1,\ \mathscr{F}_1,\ P_1)$与$(\Omega_2,\ \mathscr{F}_2,\ P_2)$均为$\sigma$－有限的一般情况来证明。这时存在$A_i^{(n)}\in\mathscr{F}_i$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_i^{(n)}=\Omega_i\quad(i=1,\ 2)\tag{1.10}$$

$$P_i(A_i^{(n)})<+\infty(i=1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ \cdots)\tag{1.11}$$

将$A_1^{(m)}$与$A_2^{(n)}$分别视为前一情形中的Ω_1与Ω_2，于是对于每个$A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$和每个$m,\ n$，$P_2(A(\omega_1,\ \cdot)\cap A_2^{(n)})$是$\mathscr{F}_1$-可测函数，$P_1(A(\cdot,\ \omega_2)\cap A_1^{(m)})$是$\mathscr{F}_2$-可测函数，且

$$\int_{A_1^{(m)}}P_2(A(\omega_1,\ \cdot)\cap A_2^{(n)})dP_1$$

$$=\int_{A_2^{(n)}}P_1(A(\cdot,\ \omega_2)\cap A_1^{(m)})dP_2$$

再由测度的可列可加性和§4.3关于积分的极限定理4，有

$$P_2(A(\omega_1,\ \cdot))=\sum_{n=1}^{\infty}P_2(A(\omega_1,\ \cdot)\cap A_2^{(n)})$$

$$P_1(A(\cdot,\ \omega_2))=\sum_{m=1}^{\infty}P_1(A(\cdot,\ \omega_2)\cap A_1^{(m)})$$

$$\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1,\ \cdot\ ))dP_1=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{A_1^{(m)}}P_2(A(\omega_1,\ \cdot\ ))dP_1$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_1^{(m)}} P_2(A(\omega_1,\ \cdot\ )\cap A_2^{(n)})dP_1$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_2^{(n)}} P_1(A(\ \cdot\ ,\ \omega_2)\cap A_1^{(m)})dp_2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{A_2^{(n)}} P_1(A(\ \cdot\ ,\ \omega_2)\cap A_1^{(m)})dP_2$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_2^{(n)}} P_1(A(\ \cdot\ ,\ \omega_2))dP_2$$

$$=\int_{\Omega_2}P_1(A(\ \cdot\ ,\ \omega_2))dP_2$$

即(1.5)式成立。

定理 5 设$(\Omega_1,\ \mathscr{F}_1,\ P_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$是$\sigma$-有限的测度空间，$A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$，令

$$P(A)=\int_{\Omega_1} P_2(A(\omega_1,\ \cdot\ ))dP_1$$

$$=\int_{\Omega_2} P_1(A(\ \cdot\ ,\ \omega_2))dP_2 \tag{1.12}$$

则P是$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$上的$\sigma$-有限测度，且

$$P(A_1\times A_2)=P_1(A_1)P_2(A_2),$$

$$A_1\in\mathscr{F}_1,\ A_2\in\mathscr{F}_2 \tag{1.13}$$

上述测度P称为P_1和P_2的**乘积测度**，记为$P_1\times P_2$；$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\ P_1\times P_2)$称为测度空间$(\Omega_1,\ \mathscr{F}_1,\ P_1)$与$(\Omega_2,\ \mathscr{F}_2,\ P_2)$的**乘积测度空间**，$(\Omega_1,\ \mathscr{F}_1,\ P_1)$与$(\Omega_2,\ \mathscr{F}_2,\ P_2)$则称为$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\ P_1\times P_2)$的**分支测度空间**。

证 由(1.6)可得(1.13)。下面只验证P具有可列可加性，测度的其余条件P显然满足。设$\{A_n\}$是$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$中一列互不相交的集，则由§4.3的定理4有

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int_{\Omega_1} P_2\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)(\omega_1, \cdot)\right) dP_1$$

$$= \int_{\Omega_1} P_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega_1, \cdot)\right) dP_1$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} P_2(A_n(\omega_1, \cdot)) dP_1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

故可列可加性成立。由（1.10）与(1.11)，令

$$A_{mn} = A_1^{(m)} \times A_2^{(n)}, m, n = 1, 2, \cdots$$

因 $$P(A_{mn}) = P_1(A_1^{(m)}) \times P_2(A_2^{(n)}) < +\infty$$

而 $$\Omega_1 \times \Omega_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}$$

故 P 是 σ－有限的。

定理 6 设$(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$与 $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$是 σ－有限测度空间，则$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$上满足条件（1.13）的测度 P 是唯一的。

证 设P'是$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2)$上满足条件（1.13)的另一个测度。由于对任何$A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2$，

$$P(A_1 \times A_2) = P'(A_1 \times A_2)$$

且 P 与P'都具有可加性，故对于任何$A \in \widehat{\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2}$，有

$$P(A) = P'(A)$$

又因为$\widehat{\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2}$是环，故根据测度拓展定理知，$P$ 与 P' 在 $\sigma(\widehat{\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2})$上一致，然而 $\sigma(\widehat{\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2}) = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$，所以

P 与 P' 在 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 上一致。

习 题 5·1

1. 设 A 是乘积空间 $\Omega_1\times\Omega_2$ 中的矩形，如果 $A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$，则称 A 是可测矩形。说明此处的定义与正文中的定义是等价的。

2. 证明可列个矩形的交是矩形。

3. 证明非空矩形的形如 $D=A\times B$ 的表达式是唯一的，即如果

$$A\times B=E\times F$$

则有 $A=E, B=F$。

4. 设 $A\in\Omega_1\times\Omega_2$，如果 A 的每一个 ω_1 截口是 $\mathscr{F}_2$-可测集，每一个 ω_2 截口是 $\mathscr{F}_1$-可测集，A 是否为 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测集？

5. 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 是任一个可测空间，Ω_2 是数直线，$\mathscr{F}_2$ 是波莱尔集的全体；f 是定义在 Ω_1 上的非负实值函数，则分别称 $\Omega_1\times\Omega_2$ 的子集

$$V^*(f)=\{(\omega_1,\omega_2)|\omega_1\in\Omega_1,\ 0\leqslant\omega_2\leqslant f(\omega_1)\}$$

与

$$V_*(f)=\{(\omega_1,\omega_2)|\omega_1\in\Omega_1,\ 0\leqslant\omega_2\leqslant f(\omega_1)\}$$

为 f 的上纵标集和下纵标集，而称集

$$\{(\omega_1,\omega_2)|\omega_1\in\Omega_1, f(\omega_1)=\omega_2\}$$

为 f（不限定是非负的）的图形。证明：

(1) 如果 f 是非负可测函数，则 $V^*(f)$ 与 $V_*(f)$ 都是可测集；

(2) 可测函数的图形是 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测集。

6. 设

$$\mathscr{A}_1=\{(-\infty,a]\times(-\infty,b]|a,b\in R\}$$

$$\mathscr{A}_2=\{(-\infty,a)\times(-\infty,b)|a,b\in R\}$$

$$\mathscr{A}_3=\{(a,b]\times(c,d]|a,b,c,d\in R\}$$

$$\mathscr{A}_4=\{[a,b]\times[c,d]|a,b,c,d\in R\}$$

$$\mathscr{A}_5=\{(a,b)\times(c,d)|a,b,c,d\in R\}$$

$$\mathscr{A}_6=\{[a,+\infty)\times[b,+\infty)|a,b\in R\}$$

证明

$$\sigma(\mathscr{A}_k)=\mathscr{B}_2 \quad (k=1,2,\cdots,6)$$

7. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$是两个可测空间，$\mathscr{F}_1=\sigma(\mathscr{A}_1)$，$\mathscr{F}_2=\sigma(\mathscr{A}_2)$，其中$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2$分别表示$\Omega_1$与$\Omega_2$的某些子集所组成的类，令

$$\widehat{\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2}=\{A_1\times A_2 \mid A_1\in\mathscr{A}_1,A_2\in\mathscr{A}_2\}$$

下式是否成立：

$$\sigma(\widehat{\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2})=\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$$

8. 证明二元连续函数是波莱尔可测函数。

9. 设$f_1(\omega_1)$是$\mathscr{F}_1$—可测函数，$f_2(\omega_2)$是$\mathscr{F}_2$-可测函数。证明$f_1(\omega_1)$、$f_2(\omega_2)$是$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测函数。

10. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$是任一测度空间，$\Omega_2$是数直线，$\mathscr{F}_2$是波莱尔可测集的全体，$P_2$是勒贝格测度，$f$是$\Omega_1$上的实值可测函数。证明$f$的图形（定义见习题5）的$P_1\times P_2$测度为零。

11. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$是$\sigma$-有限测度空间，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$是数直线，其中$\mathscr{F}_2$是波莱尔集的全体，$P_2$是勒贝格测度。又设$P=P_1\times P_2$，$f$是$\Omega_1$上的非负可积函数，则

$$P(V_*(f))=P(V^*(f))$$

$$=\int_\Omega fdP_1$$

12. 在上题的条件下，可测函数的图形是$P_1\times P_2$测度为零的集。

设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$是$\sigma$-有限测度空间，$A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$，$P=P_1\times P_2$。则$P(A)=0$的充要条件是

$$P_1(A(\cdot,\omega_2))\doteq 0[P_2]$$

或

$$P_2(A(\omega_1,\cdot))\doteq 0[P_1]$$

13. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$是$\sigma$-有限的完全测度空间。$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P_1\times P_2)$是否也是完全测度空间？

14. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$是$\sigma$-有限测度空间，把它们的乘积空间$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P_1\times P_2)$拓展为完全测度空间，记

拓展后的可测集的全体为$\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$,拓展后的测度仍记为

$$P=P_1\times P_2$$

（1） 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$都是$\sigma$-有限的完全测度空间，如果 $A\in\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$，则对几乎所有（按$P_1$）的$\omega_1\in\Omega_1$，截口$A(\omega_1,\cdot)\in\mathscr{F}_2$，对几乎所有（按$P_2$）的$\omega_2\in\Omega_2$,截口$A(\cdot,\omega_2)\in\mathscr{F}_1$。

（2） 设 $f(\omega_1,\omega_2)$是$\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$-可测函数，则对几乎所有（按$P_1$）的$\omega_1\in\Omega_2$，截口$f_{\omega_1}(\omega_2)$是$\mathscr{F}_2$-可测函数，对几乎所有（按$P_2$）的$\omega_2\in\Omega_2$，截口$f^{\omega_2}(\omega_1)$是$\mathscr{F}_1$-可测函数。

（3） $\overline{\overline{\mathscr{F}_1}\times\overline{\mathscr{F}_2}}=\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$是否成立？其中$\overline{\mathscr{F}_i}$（$i=1,2$）表示$\mathscr{F}_i$的完全化。

§5·2 富比尼（Fubini）定理

本节的目的是要建立重积分的概念，并研究重积分和累次积分的关系，以及累次积分中变换积分次序的问题。

定义1 设$(\Omega_1,\ \mathscr{F}_1,\ P_1)$与$(\Omega_2,\ \mathscr{F}_2,\ P_2)$是两个$\sigma$-有限的测度空间，$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\ P_1\times P_2)$是它们的乘积空间，$A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$，$f(\omega_1,\ \omega_2)$是定义在$A$上关于$P_1\times P_2$可积的函数，则称积分

$$\int_A f(\omega_1,\ \omega_2)dP_1\times P_2$$

为f在A上的重积分.

如果$A=A_1\times A_2$且$f^{(\omega_2)}(\omega_1)$在A_1上关于P_1可积，记

$$h(\omega_2)=\int_{A_1} f^{(\omega_2)}(\omega_1)dP_1$$

又如果$h(\omega_2)$在A_2上关于P_2可积，则记

$$\int_{A_2}h(\omega_2)dP_2=\int_{A_2}\left[\int_{A_1}f(\omega_1,\ \omega_2)d\,P_1\right]dP_2$$

$$= \int_{A_2}\int_{A_1} f \, dP_1 \, dP_2$$

$$= \int_{A_2} d P_2 \int_{A_1} f dP_1$$

上述积分称为 f 在 A 上的二次积分（或累次积分）。

类似地定义

$$\int_{A_1}\int_{A_2} f \, dP_2 \, dP_1 = \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f dP_2$$

$$= \int_{A_1} \left[\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \right] dP_1$$

它也是 f 在 A 上的二次积分。

定理 1 （富比尼）设 $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$ 与 $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$ 是两个 σ-有限的测度空间，$A = A_1 \times A_2 \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ 是可测矩形，$f(\omega_1, \omega_2)$ 是 A 上的非负 $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-可测函数，则

（1）$\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$ 是 $\mathscr{F}_1$-可测函数，$\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$ 是 $\mathscr{F}_2$-可测函数；

（2）下面的等式成立

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) d \, P_1 \times P_2 = \int_{A_1} d P_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

$$= \int_{A_2} d P_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \tag{2.1}$$

证 分以下几个步骤来证明。

1° 设 f 是 A 的某个可测子集的特征函数，即

$$f = \chi_E, \quad E \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2, \quad E \subset A$$

则根据上节引理 7 及 (1.12)，有

$$\int_{A_1} d P_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 = \int_{A_1} P_2(E(\omega_1, \cdot)) dP_1$$

$$= P(E)$$

$$\int_{A_2} d P_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$$

$$= \int_{A_2} P_1(E(\cdot, \omega_2))dP_2$$

$$= P(E)$$

又

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2)dP_1 \times P_2 = P(E)$$

由以上三式知，对于$f = \chi_E$，定理的结论成立。

2° 根据1°和积分的线性性易知，如果定理的结论对非负$\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-可测函数$f_1$与$f_2$成立，则对于任何$\alpha \geqslant 0$，$\beta \geqslant 0$，定理的结论对

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2$$

也成立。

3° 因为简单函数可用特征函数的线性组合来表示，故根据归纳法，由2°知，定理的结论对非负简单函数成立。

4° 设f是一般的非负$\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-可测函数，则根据§3.3的引理1知，存在$A$上的非负简单函数的增序列$\{f_n\}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} f_n(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$$

在A中处处成立，由3°知，定理的结论对f_n成立，于是由勒维定理有

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2)dP_1 \times P_2$$

$$= \int_{A_1 \times A_2} \lim_{n \to \infty} f_n(\omega_1, \omega_2)dP_1 \times P_2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{A_1 \times A_2} f_n(\omega_1, \omega_2)dP_1 \times P_2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f_n(\omega_1, \omega_2)dP_2$$

$$= \int_{A_1} \left[\lim_{n \to \infty} \int_{A_2} f_n(\omega_1, \omega_2)dP_2\right]dP_1$$

$$= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} \lim_{n\to\infty} f_n(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

$$= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

同理有

$$\int_{A_1\times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1\times P_2 = \int_{A_2} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$$

推论 设 $A = A_1\times A_2 \in \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$，$f(\omega_1, \omega_2)$ 是A上的非负$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测函数，如果

$$\int_{A_1\times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1\times P_2 < +\infty$$

则$\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$在 A_1上关于P_1几乎处处有限，$\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1$在$A_2$上关于$P_2$几乎处处有限。

定理2（富比尼） 设 $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, P_1)$与$(\Omega_2, \mathscr{F}_2, P_2)$是两个$\sigma$-有限的测度空间，$A = A_1\times A_2\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 是可测矩形，$f(\omega_1, \omega_2)$是A上的可积函数，则

（1）对几乎所有的$\omega_1\in A_1$，$f(\omega_1, \omega_2)$（看作是截口$f_{\omega_1}(\omega_2)$）是A_2上关于P_2可积的函数。

（2）设Δ_1表示使（1）中的结论成立的$\omega_1\in A_1$的全体，则函数

$$\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

在Δ_1上关于P_1可积。

（3）成立下面的等式

$$\int_{A_1\times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1\times P_2$$

$$= \int_{\Delta_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \tag{2.2}$$

注：为方便起见，我们将积分记号的涵义扩充如下：设f是在可测集A上定义的可积函数，E是如下的可测集：

$$E \supset A,\ P(E-A)=0$$

则我们定义

$$\int_E f dP = \int_A f dP$$

因此，对于一个积分，积分号下的函数不必在积分范围上全有意义，而只要在此范围上几乎处处有意义即可。根据这种扩充了的积分记号的意义，富比尼定理中的等式（2.2）可简化为

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1,\ \omega_2) dP_1 \times P_2$$

$$= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1,\ \omega_2) dP_2 \tag{2.3}$$

证 令

$$\Delta_1^+ = \left\{ \omega_1 \,\middle|\, \int_{A_2} f^+(\omega_1,\ \omega_2) dP_2 < +\infty, \omega_1 \in A_1 \right\}$$

$$\Delta_1^- = \left\{ \omega_1 \,\middle|\, \int_{A_2} f^-(\omega_1,\ \omega_2) dP_2 < +\infty,\ \omega_1 \in A_1 \right\}$$

$$\Delta_1 = \Delta_1^+ \cap \Delta_1^-$$

则由定理 1 的推论有

$$P_1(\Delta_1) = P_1(\Delta_1^+) = P_1(\Delta_1^-) = P(A_1) \tag{2.4}$$

于是根据定理 1 及上式得

$$\int_{A_1 \times A_2} f^+(\omega_1,\ \omega_2) dP_1 \times P_2 = \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f^+(\omega_1,\ \omega_2) dP_2$$

$$= \int_{\Delta_1} dP_1 \int_{A_2} f^+(\omega_1,\ \omega_2) dp_2$$

$$\int_{A_1 \times A_2} f^-(\omega_1,\ \omega_2) dP_1 \times P_2$$

$$= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f^-(\omega_1,\ \omega_2) dP_2$$

$$= \int_{\Delta_1} dP_1 \int_{A_2} f^-(\omega_1,\ \omega_2) dP_2$$

将以上两式相减，即得

$$\int_{A_1\times A_2} f(\omega_1, \omega_2)dp_1\times P_2$$

$$=\int_{A_1}\left\{\int_{A_2} f^+(\omega_1, \omega_2)d P_2-\int_{A_2} f^-(\omega_1, \omega_2) dP_2\right\}dp_1$$

$$=\int_{A_1} dP_1\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2)d P_2$$

$$-\int_{A_1} dP_1\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2)dP_2$$

即（2.3）式成立。

用同样的证明方法可得到如下与定理 2 对偶的定理：

定理 3（富比尼） 在定理 2 的假设下，有

（1）对几乎所有的 $\omega_2\in A_2$， $f(\omega_1, \omega_2)$ （看作是截口 $f^{\omega_2}(\omega_1)$）是A_1上关于P_1可积的函数。

（2）设 Δ_2 表示使（1）中的结论成立的 $\omega_2\in A_2$ 的全体，则函数

$$\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2)dP_1$$

在Δ_2上关于P_2可积。

（3）下面的等式成立：

$$\int_{A_1\times A_2} f(\omega_1, \omega_2)d P_1\times P_2=\int_{\Delta_2} dP_2\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2)dP_1$$

$$=\int_{A_2} dP_2\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2)dP_1$$

定理 4 在定理 2 的假设下，存在如下两个累次积分

$$\int_{A_1} dP_1\int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2)dP_2$$

$$\int_{A_2} dP_2\int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2)dP_1 \qquad (2.5)$$

且

$$\int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

$$= \int_{A_2} dP_2 \int_{A_1} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \tag{2.6}$$

注： 在(2.6)式中的积分号的涵义已经扩充（参看定理2之注）。

证 这是定理2与定理3的直接推论。

定理5 在定理1的条件下，如果(2.5)中有一个累次积分为有限，则 $f(\omega_1, \omega_2)$ 在 A 上可积且(2.6)成立。

证 用反证法，设(2.5)中的第一个积分为有限，但

$$\int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_1 \times P_2 = +\infty$$

则

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_1 \times A_2} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2 = +\infty$$

于是当 n 充分大时，有

$$\int_{A_1 \times A_2} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2 >$$

$$\int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2 \tag{2.7}$$

然而，因为 $[f(\omega_1, \omega_2)]_n$ 在 A 上可积，故有

$$\int_{A_1 \times A_2} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2$$

$$= \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_2$$

但 $[f(\omega_1, \omega_2)]_n \leqslant f(\omega_1, \omega_2)$，故有

$$\int_{A_1 \times A_2} [f(\omega_1, \omega_2)]_n dP_1 \times P_2$$

$$\leqslant \int_{A_1} dP_1 \int_{A_2} f(\omega_1, \omega_2) dP_2$$

这与(2.7)矛盾。

推论 设$A\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$，$f(\omega_1,\omega_2)$是$A$上的$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测函数，且

$$\int_{A_1}dP_1\int_{A_2}|f(\omega_1,\omega_2)|dP_2<+\infty$$

则（2.5）中两个累次积分都存在，且（2.6）式成立。

习 题 5·2

1. 举例说明，即使累次积分

$$\int_{A_1}dP_1\int_{A_2}f(\omega_1,\omega_2)dP_2$$

$$\int_{A_2}dP_2\int_{A_1}f(\omega_1,\omega_2)dP_1$$

都存在，两者也未必相等。

提示：考虑函数

$$f(\omega_1,\omega_2)=\begin{cases}\omega_2^2, & \text{当 } 0<\omega_1<\omega_2<1\\ -\omega_1^2, & \text{当 } 0<\omega_2<\omega_1<1\\ 0, & \text{其它的 } 0\leqslant\omega_1\leqslant1,\ 0\leqslant\omega_2\leqslant1\end{cases}$$

2. 如果上题中的两个累次积分存在、有限且相等，二重积分$\int_{A_1\times A_2}fdP_1\times P_2$是否一定存在？

3. 设$f_i(\omega_i)$是σ-有限测度空间$(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)(i=1,2)$上的可积函数，证明

（1）$f_i(\omega_1,\omega_2)=f_i(\omega_i)$是$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测函数$(i=1,2)$；

（2）$f(\omega_1,\omega_2)=f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)$是$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$-可测函数；

（3）$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}f(\omega_1,\omega_2)dP_1\times P_2=\left[\int_{\Omega_1}f_1(\omega_1)dP_1\right]\left[\int_{\Omega_2}f_2(\omega_2)dP_2\right]$。

4. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$是两个$\sigma$-有限的测度空间，$A=A_1\times A_2$是可测矩形，$f(\omega_1,\omega_2)$是$A$上的可测函数。举例说明，即使$f$在$A$上可积，也未必对所有的$\omega_1\in A_1$积分$\int_{A_2}f(\omega_1,\omega_2)dP_2$都存

在；同样，也未必对所有的 $\omega_2 \in A_2$ 积分 $\int_{A_1} f(\omega_1,\omega_2)dP_1$ 都存在。

5. 用富比尼定理证明§4.3的定理4：设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是 σ-有限测度空间，$f_n(\omega)$ 是非负 $\mathscr{F}$-可测函数，则

$$\int_{\Omega_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)\right]dP=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} f_n(\omega)dP$$

提示：令

$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)=(\Omega,\mathscr{F},P)$

$\Omega_2=\{$正整数$\}$

$\mathscr{F}_2=\Omega_2$ 的一切子集的全体

$P_2(A)=A$ 中的元素的个数，$A\in\mathscr{F}_2$

$f_n(\omega)=f(\omega,n)$

§5·3 二维勒贝格-斯提杰测度与二维勒贝格-斯提杰积分

直线上的勒贝格-斯提杰测度和勒贝格-斯提杰积分的概念可以推广到多维空间。本节中我们考察平面的情形。由所述的推理方法容易看出对于维数更大的空间应作怎样的改变。

定义1 设 R^2 是平面上的点的全体，$\mathscr{B}_2$ 是 R^2 中波莱尔集的全体。P 是 $(R^2,\mathscr{B}_2)$ 上的测度。如果 P 在二维有限区间上取有限值，即

$$P((a,b]\times(c,d])<+\infty, a,b,c,d\in R$$

则称 P 为**二维(平面上的)勒贝格-斯提杰测度**，并称 $(R^2,\mathscr{B}_2,P)$ 上的可测函数关于 P 的积分为**勒贝格-斯提杰积分**。有时也称 $\overline{\mathscr{B}_2}$ 上 P 的完全化测度为**勒贝格-斯提杰测度**，相应的积分也称为**勒贝格-斯提杰积分**

为叙述简单起见，下面我们仅讨论 P 为有限测度（即设

$P(R^2)<+\infty$)的特殊情况。

定义 2 设 P 是$\mathscr{B}_2$上的有限测度，则称定义在R^2上的函数

$$F(x,\ y)=P\ ((-\infty,x]\times(-\infty,y]),(x,y)\in R^2$$

为 P 的分布函数。

$(R^2,\mathscr{B}_2,P)$ 上的勒贝格-斯提杰积分 $\int_{R^2} g(x,\ y)dP$ 也用记号

$$(L-S)\int_{R^2} g(x,y)dF(x,y)$$

或 $(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,\ y)dF(x,\ y)$来表示。

定理 1 设P是$\mathscr{B}_2$上的有限测度，则 P 的分布函数 $F(x,y)$ 具有如下性质：

（1）$F(x,\ y)$是每个自变量的增函数且右连续；

（2）对任意固定的y，

$$F(-\infty,\ y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,\ y)=0$$

对任意固定的x，

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(-\infty,\ +\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}}F(x,\ y)=0$$

（3）$F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)<+\infty$。

（4）对于R^2中的任意点$(x_1,\ y_1)$与$(x_2,\ y_2)$，当$x_1<x_2$，$y_1<y_2$时，下面的不等式成立：

$$F(x_2,\ y_2)-F(x_1,\ y_2)-F(x_2,\ y_1)+F(x_1,\ y_1)\geqslant 0$$

上式左边的式子称为$F(x,\ y)$的二阶差分，记为 $\Delta F(x_1,\ y_1,\ x_2,y_2)$。

前三个性质可以仿照一维的情况证明。例如，根据测度的

下连续性及P的有限性即可推出（3）：

$$F(+\infty, +\infty)=P(R^2)<+\infty \tag{3.1}$$

下面我们来证明性质（4）

令

$$D_{xy}=(-\infty, x]\times(-\infty, y]$$

则

$$F(x, y)=P(D_{xy})$$

又

$$D_{x_1y_2}\cap D_{x_2y_1}=D_{x_1y_1}$$

故

$$P(D_{x_1y_2}\cup D_{x_2y_1})=P(D_{x_1y_2})+P(D_{x_2y_1})-P(D_{x_1y_1}) \tag{3.2}$$

令

$$D=(x_1,x_2]\times(y_1,y_2]$$

则

$$D=D_{x_2y_2}-(D_{x_1y_2}\cup D_{x_2y_1})$$

$$D_{x_1y_2}\cup D_{x_2y_1}\subset D_{x_2y_2}$$

于是由（3.2）式有

$$\begin{aligned}P(D)&=P(D_{x_2y_2})-P(D_{x_1y_2}\cup D_{x_2y_1})\\&=P(D_{x_2y_2})-P(D_{x_1y_2})-P(D_{x_2y_1})+P(D_{x_1y_1})\\&=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\\&\geqslant 0\end{aligned} \tag{3.3}$$

定义 3 定义在R^2上具有定理1中的性质（1）—（4）的函数$F(x,y)$称为**二元定分布函数**，如果还有

$$F(+\infty,+\infty)=1$$

则称$F(x,y)$为**二元概率分布函数**。

定理 2 设$F(x,y)$是二元定分布函数，则在$(\mathrm{R}^2,\mathscr{B}_2)$上存在唯一的测度$P$，使得当$x_1<x_2,y_1<y_2$时，

$$P((x_1,x_2]\times(y_1,y_2])=\Delta F(x_1,y_1;x_2,y_2) \qquad (3.4)$$

P就称为$F(x,y)$所引出的勒贝格—斯提杰测度。

证明可仿照一维的情况给出（参看习题2与3）。

由（3.3）式知，$(R^2,\mathscr{B}_2)$上的任何有限测度P的分布函数所引出的测度就是P本身。

推论 设$F(x,y)$是定分布函数，则$F(x,y)$就是它所引出的勒贝格-斯提杰测度P的分布函数。

证 根据测度的下连续性及$F(x,y)$的性质（2）和(3.4)式即得

$$\begin{aligned}&P((-\infty,x_2]\times(-\infty,y_2])\\=&\lim_{\substack{x_1\to-\infty\\y_1\to-\infty}}P((-x_1,x_2]\times(y_1,y_2])\\=&\lim_{\substack{x_1\to-\infty\\y_1\to-\infty}}\Delta F(x_1,y_1;x_2,y_2)=F(x_2,y_2)\end{aligned}$$

引理1 设$F_1(x)$,$F_2(y)$是一维定分布函数，则

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$$

是二维定分布函数，且当$x_1<x_2$,$y_1<y_2$时，

$$\Delta F(x_1,y_1;x_2,y_2)=[F_1(x_2)-F_1(x_1)][F_2(y_2)-F_2(y_1)] \qquad (3.5)$$

证 由分解因式即得

$$\begin{aligned}\Delta F(x_1,y_1;x_2,y_2)&=F_1(x_1)F_2(y_1)-F_1(x_1)F_2(y_2)\\&-F_1(x_2)F_2(y_2)+F_1(x_1)F_2(y_1)\\&=[F_1(x_2)-F_1(x_1)][F_2(y_2)-F_2(y_1)]\end{aligned}$$

定理3 设$F(x,y)$如引理1所给，P_1,P_2分别为由$F_1(x)$,$F_2(y)$所引出的一维勒贝格-斯提杰测度，P为由$F(x,y)$引出的二维勒贝格-斯提杰测度，则

$$P=P_1\times P_2$$

证 由乘积测度与一维勒贝格-斯提杰测度的定义及(3.5)

式有

$$P_1\times P_2((x_1,x_2]\times(y_1,y_2])=\Delta F(x_1,y_1;x_2,y_2)$$

根据定理 2 .$(R^2,\mathscr{B}_2)$ 上满足条件 (3.4)的测度 P 是唯一的，故在$\mathscr{B}_2$ 上的测度 P 与$P_1\times P_2$恒等。

定义 4 设 $f_1(\omega)$与 $f_2(\omega)$ 是定义在同一可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个实值可测函数，则称

$$f(\omega)=(f_1(\omega),\ f_2(\omega))$$

构成一个二维可测向量。特别是，如果 $\xi_1(\omega)$ 与 $\xi_2(\omega)$ 是同一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的两个随机变量，则二维可测向量

$$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$$

也称为二维随机变量。

引理 2 设 $f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$是定义在同一可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$上的实值函数，则

$$f(\omega)=(f^2(\omega),\ f_2(\omega))$$

是一个二维可测向量的充要条件是对任何 $A\in\mathscr{B}_2$ 有

$$\{\omega\mid f(\omega)\in A\}\in\mathscr{F} \tag{3.6}$$

证 充分性：设 x 是任意实数，令

$$A=(-\infty,x]\times R$$

则

$$\begin{aligned}\{\omega|f(\omega)\in A\}&=\{\omega|f_1(\omega)\in(-\infty,x],f_2(\omega)\in R\}\\&=\{\omega|f_1(\omega)\leqslant x\}\end{aligned} \tag{3.7}$$

由于$A\in\mathscr{B}_2$，故由(3.6)与(3.7)有

$$\{\omega|f_1(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$$

即$f_1(\omega)$可测。同理可证$f_2(\omega)$可测。

必要性：设$\mathscr{A}$是R^2中一切使(3.6)式成立的集A所构成的类。仿照一维的情况可证$\mathscr{A}$是一个σ-代数。令

$$\mathscr{C}=\{[-\infty,a]\times(-\infty,b]\,|\,a,b\in R\},$$

由可测向量的定义知$\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$，从而

$$\mathscr{B}_2=\sigma(\mathscr{C})\in\mathscr{A}$$

这就证得(3.6)式对一切二维波莱尔集A成立。

引理 3　设$f(\omega)$是测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的二维可测向量，对于每个$B\in\mathscr{B}_2$，令

$$\mu(B)=P(f^{-1}(B)) \tag{3.8}$$

则μ是$\mathscr{B}_2$上的测度.

证明与§4.4的引理1类似，此处从略。

定义 5　设

$$f(\omega)=(f_1(\omega),f_2(\omega))$$

是测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测向量，则称由(3.8)定义的$\mathscr{B}_2$上的测度μ为$f(\omega)$所引出的测度，$(R^2,\mathscr{B}_2,\mu)$则称为由$f(\omega)$引出的测度空间.

如果$(\Omega,\mathscr{F},P)$为有限测度空间，则称

$$F(x,y)=P(f_1(\omega)\leqslant x,f_2(\omega)\leqslant y)$$

为$f(\omega)$的分布函数，显然$f(\omega)$的分布函数与$\mathscr{B}_2$上由f引出的测度μ的分布函数一致，即

$$\begin{aligned}F(x,y)&=P(f(\omega)\in(-\infty,x]\times(-\infty,y])\\&=P(f^{-1}((-\infty,x]\times(-\infty,y]))\\&=\mu((-\infty,x]\times(-\infty,y])\end{aligned}$$

引理 4　设$f(\omega)=(f_1(\omega),f_2(\omega))$是可测空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测向量，$g(x,y)$是二元波莱尔函数，则$g(f_1(\omega),f_2(\omega))$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数.

证　设$B\in\mathscr{B}_1$，由于g是二元波莱尔可测函数，故

$$g^{-1}(B)\in\mathscr{B}_2$$

于是由引理2

$$\{\omega|g(f_1(\omega),\ f_2(\omega))\in B\}=\{\omega|f(\omega)\in g^{-1}(B)\}\in\mathscr{F}$$ 故

$g(f_1(\omega),f_2(\omega))$对$\mathscr{F}$可测.

下面我们给出二维形式的积分转换定理，这个定理在概率论中起着重要作用.

定理 4 设

$$f(\omega)=(f_1(\omega),f_2(\omega))$$

是有限测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的二维随机向量，$(R^2,\mathscr{B}_2,\mu)$是$f(\omega)$引入的测度空间，$F(x,y)$是$f(\omega)$的分布函数，$g(x,y)$是二元波莱尔可测函数，如果积分$\int_\Omega g(f_1(\omega),f_2(\omega))dP$和$(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dF(x,y)$中有一个存在，则另一个也存在，且

$$\int_\Omega g(f_1(\omega),f_2(\omega))dP$$
$$=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dF(x,y) \qquad (3.9)$$

证明可仿照一维情况（§4.4定理2）给出.

推论 $(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的二维随机变量，$F(x,y)$是其分布函数，则

$$E\xi_1(\omega)=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x,y)$$

$$E\xi_2(\omega)=(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ydF(x,y)$$

证 分别取$g(x,y)$为x或y即得.

定义 5 设$f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$是同一测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值可测函数，如果对于任意实数x，y，有

$$P(f_1(\omega)\leqslant x,f_2(\omega)\leqslant y)$$
$$=P(f_1(\omega)\leqslant x)P(f_2(\omega)\leqslant y) \qquad (3.10)$$

则称$f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$相互独立.

独立性是概率论中最重要的概念之一.

显然(3.10)式可写为

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y) \tag{3.11}$$

其中$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为$f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$的分布函数，$F(x,y)$为二维随机向量$(f_1(\omega), f_2(\omega))$的分布函数。

定理 5 设$f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$是测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值可测函数，则它们相独立的充要条件是对一切一维波莱尔集B_1与B_2有

$$\begin{aligned} & P(f_1(\omega)\in B_1,\ f_2(\omega)\in B_2) \\ & =P(f_1(\omega)\in B_1)P(f_2(\omega)\in B_2) \end{aligned} \tag{3.12}$$

只证必要性。设$f(\omega)=(f_1(\omega),\ f_2(\omega))$引出的测度为$\mu$。如上所述，$\mu$也是由$f(\omega)=(f_1(\omega),f_2(\omega))$的分布函数

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$$

所引出的测度，根据定理3，

$$\mu=P_1\times P_2$$

其中P_1与P_2分别为由$f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$所引出的一维勒贝格-斯提杰测度，于是对于任意的$B_1\in\mathscr{B}_1$，$B_2\in\mathscr{B}_1$有

$$\begin{aligned} & P(f_1(\omega)\in B_1,f_2(\omega)\in B_2)=P(f(\omega)\in B_1\times B_2) \\ & =\mu(B_1\times B_2) \\ & =P_1\times P_2(B_1\times B_2) \\ & =P(B_1)\cdot P(B_2) \\ & =P(f_1(\omega)\in B_1)P(f_2(\omega)\in B_2) \end{aligned}$$

即(3.12)成立。

定理 6 设$f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$是相互独立的可测函数，g_1与g_2是任意一元波莱尔可测函数，则$g_1(f_1(\omega))$与$g_2(f_2(\omega))$也相互独立。

证 对任意的一维波莱尔集B_1与B_2，由定理5及§3.2定理1有

$$P(g_1(f_1)\in B_1,g(f_2)\in B_2)$$

$$=P(f_1\in g_1^{-1}(B_1),f_2\in g_2^{-1}(B_2))$$
$$=P(f_1\in g_1^{-1}(B_1))P(f_2\in g_2^{-1}(B_2))$$
$$=P(g_1(f_1)\in B_1)P(g_2(f_2)\in B_2)$$

定理7 设$f_1(\omega)$与$f_2(\omega)$是有限测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上相互独立的可积函数，则

$$\int_\Omega f_1 f_2\, dP=\int_\Omega f_1\ dP\cdot\int_\Omega f_2\ dP$$

证 设f_1、f_2和(f_1,f_2)所引入的测度分别是P_1、P_2和μ，则

$$\mu=P_1\times P_2$$

于是定理 4 及富比尼定理有

$$\int_\Omega f_1 f_2 dP=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy dP_1\times P_2$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x dP_1\int_{-\infty}^{+\infty}y dP_2=\int_\Omega f_1\ dP\cdot\int_\Omega f_2\ dP$$

推论 设$\xi_1(\omega)$与$\xi_2(\omega)$是相互独立且具有有限数学期望的随机变量，则

$$E\xi_1\xi_2=(E\xi_1)(E\xi_2)$$

在普通的概率论中用来定义随机变量的数字特征的积分是黎曼型的斯提杰积分，下面我们来给出它的定义并讨论它和勒贝格-斯提杰积分的关系．

定义 6 设$F(x,y)$是二元定分布函数，$f(x,y)$是定义在R^2上的实值函数．在区间$[a,b]$与$[c,d]$任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$
$$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$$

来划分矩形$[a,b]\times[c,d]$，记这一分法为Δ，在每个区间$[x_{k-1},x_k]$与$[y_{k-1},y_k]$中分别任取一点x_k^*和y_k^*，作和

$$\sigma=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f(x^*_i,y^*_j)\Delta F(x_{i-1},x_i;y_{j-1},y_j)$$

令

$$\lambda(\Delta)=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\{(x_i-x_{i-1}),(y_j-y_{j-1})\}$$

如果当$\lambda(\Delta)\to0$时，不论分法如何，也不论x_i^*和y_j^*的取法如何，σ有有限的极限I，则称这个极限I为$f(x,y)$在矩形$[a,b]\times[c,d]$上关于$F(x,y)$的黎曼-斯提杰积分(简称$R-S$积分)，记为

$$(R-S)\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\c\leqslant y\leqslant d}}f(x,y)dF(x,y)=\lim_{\lambda(\Delta)\to0}\sigma$$

$$=\lim_{\lambda(\Delta)\to0}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*,y_j^*)\Delta F(x_{i-1}x_i;y_{j-1},y_j)$$

定义7 设$F(x,y)$是二元定分布函数，$f(x,y)$是R^2上的实值函数，如果对于任何$[a,b]$，$[c,d]$，积分

$$(R-S)\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\c\leqslant y\leqslant d}}f(x,y)dF(x,y)$$

存在，且极限

$$\lim_{\substack{b,d\to+\infty\\a,c\to-\infty}}(R-S)\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\c\leqslant y\leqslant d}}f(x,y)dF(x,y)=I$$

存在，则称此极限为$f(x,y)$关于$F(x,y)$在R^2上的广义黎曼-斯提杰积分，记为

$$I=(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dF(x,y)\tag{3.13}$$

如果I有限，则称积分(3.13)收敛。

如果

$$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|dF(x,y)<\infty$$

则称积分（3.13）绝对收敛

仿照广义黎曼积分的情况可以证明，如果积分（3.13）绝

对收敛，则它也收敛。

定理 8 设$F(x,y)$是二元定分布函数，$f(x,y)$是R^2上的连续函数，则在R^2上$f(x,y)$关于$F(x,y)$勒贝格-斯提杰可积的充要条件是积分$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dF(x,y)$绝对收敛，且在此条件满足时，有

$$(L-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dF(x,y)$$

$$=(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dF(x,y) \tag{3.14}$$

定理 9 设$F(x,y)$是二元定分布函数，它在$[a,b]\times[c,d]$上具有连续偏导数$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$，且$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上连续，则

$$(R-S)\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} f(x,y)dF(x,y)$$

$$=\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} f(x,y)\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy$$

上式的右边的积分是普通的二重积分。

定理10 设$F(x,y)$是二元定分布函数，它在R^2上具有连续的偏导数$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$，且$f(x,y)$在$R^2$上连续，如广义二重积分$(R)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy$收敛，则

$$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dF(x,y)$$

也收敛，且

$$(R-S)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dF(x,y)$$

$$=(R)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy$$

以上三个定理的证明是纯分析性的。此处从略。

习　题　5·3

1．二元定分布函数的诸定义性质并不独立，哪些性质可由其余的性质推出？

2．设$\mathscr{A}$是二维有限左、下开区间的全体，即

$$\mathscr{A}=\{(a,b]\times(c,d]\,|\,a,\ b,\ c,\ d\in R\}$$

$F(x,y)$是二元定分布函数。证明

（1）$\mathscr{A}$对交运算封闭；

（2）$\mathscr{A}$上的集函数：

$$P((a,b]\times(c,d])=\Delta F(a,b;c,d)$$

具有可列可加性；

（3）设$\mathscr{F}$是由$\mathscr{A}$中有限个互不相交的集的和集的全体所组成的类，则$\mathscr{F}$是一个环；

（4）设

$$A=\sum_{k=1}^{n}(a_k,b_k]\times(c_k,d_k]$$

令

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}\Delta F(a_k,b_k;c_k,d_k]$$

则$P(A)$是$\mathscr{F}$上的测度。

3．证明定理2．

4．P是$\mathscr{B}_2$上的有限测度，令

$$F(x,y)=P([x,+\infty)\times[y_1,\ +\infty))$$

讨论$F(x,y)$的性质。

5．在定理7的条件下，证明f_1f_2是Ω上的可积函数。

6．证明引理3．

7．完成定理8—10的证明。

第六章 广 义 测 度

§6·1 广义测度的哈恩（Hahn）分解和若当（Jordan）分解

定义1 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，μ是定义在$\mathscr{F}$上的广义实值集函数，如果μ满足如下条件：

（1）$\mu(\phi)=0$；

（2）除有限值外，μ在$\pm\infty$二值中至多只能取得一个值；

（3）具有可列可加性：当$\{A_n\}$是$\mathscr{F}$中一列不相交的集时，有

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

则称μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的一个**广义测度**.

把$(\Omega,\mathscr{F})$与其上的广义测度μ合并一起来考虑，则称它为**广义测度空间**．记为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$.

如果对于任何$A\in\mathscr{F}$有

$$|\mu(A)|<+\infty$$

则称μ是有限的，这时也称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是有限广义测度空间.

如果对于任何$A\in\mathscr{F}$，存在$A_n\in\mathscr{F}$，使得

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ 且\ |\mu(A_n)|<+\infty(n=1,2,3\cdots)$$

则称 μ 是σ-有限的。这时也称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是 σ-有限广义测度空间。

例1 设 P_1 与 P_2 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个测度，其中至少有一个是有限测度，则

$$\mu(A)=P_1(A)-P_2(A),A\in\mathscr{F}$$

是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度。

例2 若 f 是σ-有限测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可积函数，则

$$\mu(A)=\int_A fdP,\ A\in\mathscr{F}$$

是有限广义测度。集函数$\mu(A)$也称为 f 的不定积分。

以上两例的证明可直接由测度的定义和积分的性质得到。

读者不难验证，测度的基本性质除单调性及次可列可加性外，其余对广义测度也成立，因为它们的证明并未用到测度的非负性条件。

广义测度还具有以下性质：

定理1 设 μ 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，如果 $A,B\in\mathscr{F}$，且$A\subset B$，$|\mu(B)|<+\infty$，则$|\mu(A)|<+\infty$。

证 根据 μ 的有限可加性有

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)$$

因为$|\mu(B)|<+\infty$，故必须有$|\mu(A)|<+\infty$。

定理2 设 μ 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，如果$\{A_n\}$是$\mathscr{F}$中一列互不相交的集，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(A_n)|<+\infty$$

证 令

$$A_n^+ = \begin{cases} A_n, & \text{当}\mu(A_n) \geqslant 0 \\ \phi, & \text{当}\mu(A_n) < 0 \end{cases}$$

$$A_n^- = \begin{cases} \phi, & \text{当}\mu(A_n) \geqslant 0 \\ A_n, & \text{当}\mu(A_n) < 0 \end{cases}$$

则

$$A_n = A_n^+ + A_n^- \tag{1.1}$$

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^+\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^+) \tag{1.2}$$

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^-) \tag{1.3}$$

根据广义测度的定义，在$\pm\infty$二值中，μ至多只能取得其中一个值．为确定起见，不妨设μ不取$-\infty$值．于是

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^-\right) > -\infty$$

又由于$\mu(A_n^-) \leqslant 0$．故(1.3)收敛．由假设及（1.1），

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A_n^+) + \mu(A_n^-)] \tag{1.4}$$

收敛．由（1.4）减去（1.3）即得（1.2）收敛．易知

$$|\mu(A_n)| = \mu(A_n^+) - \mu(A_n^-)$$

故由（1.2）与（1.3）的收敛性即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^+) - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^-) < +\infty$$

定义2　设μ是$(\Omega, \mathscr{F})$上的广义测度，$A \in \mathscr{F}$．如果当$E \in \mathscr{F}$且$E \subset A$时总有$\mu(E) \geqslant 0$，则称A是**正集**（对μ而言）；如果当$E \in \mathscr{F}$且$E \subset A$时总有$\mu(E) \leqslant 0$，则称A是**负集**（对μ而言）．

显然ϕ既是正集又是负集，而且全体正集的类与全体负集的类都是σ一环．

定理 3 设 μ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个广义测度，则存在两个不相交的可测集 A 和 B，使得

$$A+B=\Omega$$

且 A 对于 μ 为正集，B 对于 μ 为负集。

我们称集 A 和 B 形成 Ω 对 μ 的一个**哈恩分解**。

证 因为 μ 在 $+\infty$ 与 $-\infty$ 二值中至多只能取得一个值，所以为确定起见，我们可以假定，对于任何 $E\in\mathscr{F}$，

$$-\infty<\mu(E)\leqslant+\infty \tag{1.5}$$

令

$$\beta=\inf\{\mu(B)\mid B\text{是}\mu\text{的负集}\} \tag{1.6}$$

则存在负集 $B_n\in\mathscr{F}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\beta \tag{1.7}$$

令 $B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，则 B 是一个负集。由 (1.6) 知，$\beta\leqslant\mu(B)$，另一方面，因为 B 是负集，故 $\mu(B-B_n)\leqslant0$，所以

$$\mu(B)=\mu(B_n)+\mu(B-B_n)\leqslant\mu(B_n)$$

令 $n\to\infty$，由 (1.7) 知 $\mu(B)\leqslant\beta$。从而 $\mu(B)=\beta$（即负集的 μ 值可以达到最小）。

现在我们证明 $A=\Omega-B$ 是一个正集，假定结论不成立，设 E_0 是 A 的一个可测子集使得 $\mu(E_0)<0$。首先可以看出 E_0 不可能是负集，因为如果 E_0 是负集，则 $B+E_0$ 也将是负集，且

$$\mu(B+E_0)=\mu(B)+\mu(E_0)<\mu(B)=\beta$$

这与 (1.6) 矛盾。于是 E_0 存在 μ 值为正的可测子集。令

$$k_1=\min\left\{n\,\middle|\,\text{存在可测集 }E\subset E_0\text{，使}\mu(E)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$$

并设 E_1 是 E_0 的可测子集，使得 $\mu(E_1)\geqslant\dfrac{1}{k_1}$。因为 $\mu(E_0)<0$，所以由 (1.5) 及定理 1 知，$\mu(E_0)$ 和 $\mu(E_1)$ 都是有限的。因为

$$\mu(E_0-E_1)=\mu(E_0)-\mu(E_1)\leqslant\mu(E_0)-\frac{1}{k_1}<0$$

故刚用于 E_0 的论证也可以同样用之于 E_0-E_1，即令

$$k_2=\min\left\{n \mid \text{存在可测集} E\subset E_0-E_1,\ \text{使得}\ \mu(E)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$$

并设E_2是E_0-E_1 的可测子集，使得 $\mu(E_2)\geqslant\frac{1}{k_2}$，则有

$$\mu(E_0-E_1-E_2)=\mu(E_0)-\mu(E_1)-\mu(E_2)\leqslant\mu(E_0)$$

$$-\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}<0$$

依此类推，以至无穷。令

$$F_0=E_0-\sum_{n=1}^{\infty}E_n$$

由于 $\mu(F_0)$ 有限，且

$$\mu(F_0)=\mu(E_0)-\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\leqslant\mu(E_0)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}\quad(1.8)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}$收敛，因而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}=0$$

由此可知 F_0 不可能存在 μ 值为正的 可 测 子 集，即 如 果 F 是 F_0的任意子集，则有 $\mu(F)\leqslant0$。这也就是说，F_0 是一个负集，因而 $B+F_0$ 也是负集。但 F_0 和 B 不相交，且由（1.8）有

$$\mu(F_0)\leqslant\mu(E_0)<0$$

于是

$$\mu(B+F_0)=\mu(B)+\mu(F_0)<\mu(B)=\beta$$

这与$\mu(B)$的最小性质矛盾。

引理1　设 μ 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，

$$\Omega=A_1+B_1\ \text{和}\ \Omega=A_2+B_2$$

是Ω的两个哈恩分解，则对每个可测集 E，有

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap A_2)$$

$$\mu(E\cap B_1)=\mu(E\cap B_2)$$

证 由关系式

$$E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap A_1$$

可知

$$\mu(E\cap(A_1-A_2))\geqslant 0$$

又由关系式

$$E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap B_2$$

可知

$$\mu(E\cap(A_1-A_2))\leqslant 0$$

因此有

$$\mu(E\cap(A_1-A_2))=0 \tag{1.9}$$

同理有

$$\mu(E\cap(A_2-A_1))=0 \tag{1.10}$$

由于

$$A_1\cup A_2=A_1+(A_2-A_1)=A_2+(A_1-A_2)$$

故由（1.9）与（1.10）有

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap(A_1\cup A_2))=\mu(E\cap A_2)$$

同理有$\mu(E\cap B_1)=\mu(E\cap B_2)$.

定义 3 设μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，$\Omega=A+B$是Ω的哈恩分解．对于每个$E\in\mathscr{F}$，令

$$\mu^+(E)=\mu(E\cap A)$$

$$\mu^-(E)=-\mu(E\cap B) \tag{1.11}$$

$$|\mu|(E)=\mu^+(E)+\mu^-(E) \tag{1.12}$$

集函数 μ^+，μ^- 和 $|\mu|$分别称为μ的上变差，下变差和全变差．

引理 1 表明，尽管Ω的哈恩分解未必唯一，但由（1.11）与（1.12）定义的μ的变差是唯一确定的．

显然，如果μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度，则$\Omega=\Omega+\phi$是Ω的哈恩分解，这时有

$$\mu^-=0,\ \mu^+=|\mu|=\mu$$

容易证明，本节例2所述有限广义测度μ的上、下变差及全变差分别为

$$\mu^+(E)=\int_E f^+dp$$

$$\mu^-(E)=\int_E f^-dp$$

$$|\mu|(E)=\int_E |f|dp$$

定理4　设μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，则

（1）μ的上变差μ^+、下变差μ^-和全变差$|\mu|$都是$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度，且

$$\mu(E)=\mu^+(E)-\mu(E),E\in\mathscr{F} \tag{1.13}$$

（2）如果μ有限，则μ^+和μ^-也有限；如果μ为σ-有限，则μ^+与μ^-也σ-有限。

（3）μ^+和μ^-中至少有一个是有限测度。

证（1）是显然的。

（2）设μ有限，$E\in\mathscr{F}$，则根据定理1知，

$$\mu^+(E)=\mu(E\cap A)\text{和}\mu^-(E)=-\mu(E\cap B)$$

也都有限。由此命题的第二部分可用通常的方法推出。

（3）因为μ在$+\infty$和$-\infty$二值中至多只能取得一个值，由此可见μ^+与μ^-中至少有一个恒为有限。

定理4表明，每个广义测度可以表为两个测度（其中至少有一个是有限的）之差，(1.13)将μ表为它的上变差与下变差之差，这种表示方法称为μ的若当分解。

习 题 6·1

1．如果广义测度的定义中去掉条件（2），将会出现什么问题？

2．设μ是可测空间（Ω，$\mathscr{F}$）上的广义测度。对于任何不相交的可测集的序列$\{A_n\}$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

的和总具有确定的意义，也就是说，这个级数或者是收敛的，或者发散到$+\infty$或$-\infty$。

3．设μ是（Ω，$\mathscr{F}$）上的广义测度，$\{A_n\}$是$\mathscr{F}$中互不相交的可测集，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=+\infty$$

则对于$\{A_n\}$任意重排后所得的集列$\{B_n\}$都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)=+\infty$$

4．设P_1是（Ω，$\mathscr{F}$）上的σ-有限测度，P_2是（Ω，$\mathscr{F}$）上的有限测度，则广义测度

$$\mu(A)=P_1(A)-P_2(A_2),\quad A\in\mathscr{F}$$

是σ-有限的。

5．两个σ-有界测度之和是σ-有限测度，这个命题对无限项和的场合是否成立？

6．如果广义测度μ可以按两种方式表为两个测度之差：

$$\mu=P_1-P_2,\quad \mu=\widetilde{P_1}-\widetilde{P_2}$$

是否一定有$P_1=\widetilde{P_1}$和$P_2=\widetilde{P_2}$？

7．证明全体正集与全体负集的类都是σ环。

8．构造一个例子说明哈恩分解不是唯一的。

9．设μ是(Ω，$\mathscr{F}$)上的广义测度，$E\in\mathscr{F}$，则

$$\mu^+(E)=\sup\{\mu(F)\mid F\in\mathscr{F}且F\subset E\}$$

$$\mu^-(E)=-\inf\{\mu(F)\mid F\in\mathscr{F}且F\subset E\}$$

10. 设N是正整数的全体，对于任何序列 $\{a_n\}$ 和任何 $E\subset N$，令$\mu(E)$表示$\{a_n\}$中的对应项的和（如果它存在），即

$$\mu(E)=\sum_{n\in E}a_n$$

什么样的序列对应于N上的广义测度？证明如果$\{a_n\}$是这样的序列且对于每个n，$|a_n|>0$，则N相对于μ的哈恩分解是唯一的。

11. 设μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，$E_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，且$E_1\subset E_2\subset\cdots$，则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

12. 设μ是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度，$E_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$，$E_1\supset E_2\supset\cdots$，且$|\mu(E_1)|<\infty$，则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

13. 证明：如果μ是有限广义测度，则

$$\mu^+=\frac{1}{2}(\mu+|\mu|)$$

$$\mu^-=\frac{1}{2}(|\mu|-\mu)$$

14. 证明若当分解在如下的意义下是最小的：如果μ是一个广义测度，且$\mu=\mu_1-\mu_2$，此处μ_1与μ_2是测度，则$|\mu|\leqslant\mu_1+\mu_2$，且仅当$\mu_1=\mu^+$，$\mu_2=\mu^-$时等号成立。

15. 设μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，证明存在$A,B\in\mathscr{F}$使得

$\mu(A)=\sup\{\mu(F)\,|F\in\mathscr{F}\}$，

$\mu(B)=\inf\{\mu(F)\}$，$F\in\mathscr{F}\}$

§6·2 拉东-尼古丁（Radon-Nikodym）定理及其应用

定义1 设$(\Omega,\mathscr{F})$是一个可测空间，μ和γ是$\mathscr{F}$上的广

义测度，如果对于每个可测集E，当 $|\mu|(E)=0$ 时，有 $\gamma(E)=0$，则称γ对于μ绝对连续，记为 $\gamma\ll\mu$。

根据积分的性质可知，上节例 2 中定义的集函数（可积函数的不定积分）$\mu(A)$对于测度P是绝对连续的。

定理 1　设μ和γ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，则条件

（1）$\gamma\ll\mu$；

（2）$\gamma^{+}\ll\mu$且$\gamma^{-}\ll\mu$；

（3）$|\gamma|\ll|\mu|$。

相互等价.

证　设（1）成立，则当 $|\mu|(E)=0$ 时有 $\gamma(E)=0$，令 $\Omega=A+B$为Ω对γ的一个哈恩分解，则当$|\mu|(E)=0$ 时有

$$0\leqslant|\mu|(E\cap A)\leqslant|\mu|(E)=0$$

和

$$0\leqslant|\mu|(E\cap B)\leqslant|\mu|(E)=0$$

由此有

$$|\mu|(E\cap A)=|\mu|(E\cap B)=0$$

由此有

$$\gamma^{+}(E)=\gamma(E\cap A)=0$$

和

$$\gamma^{-}(E)=\gamma(E\cap B)=0$$

于是（2）成立。

由关系式

$$|\gamma|(E)=\gamma^{+}(E)+\gamma^{-}(E)$$

知，由（2）可推出（3）；又由关系式

$$0\leqslant|\gamma(E)|\leqslant|\gamma|(E)$$

知，由（3）可推出（1）。

定理 2　设μ和γ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，其中ν为有

限，且$\gamma\ll\mu$，则对于每个正数ε，存在正数δ，使得$E\in\mathscr{F}$且$|\mu|(E)<\delta$时，有$|\gamma|(E)<\varepsilon$。

证 用反证法，假定结论不成立，则存在$\varepsilon>0$及$E_n\in\mathscr{F}$，使得

$$|\mu|(E_n)<\frac{1}{2^n}\text{且}|\gamma|(E_n)\geqslant\varepsilon,\ n=1,2,\cdots$$

令
$$E=\overline{\lim_n}\,E_n$$

则对于任何n有

$$|\mu|(E)\leqslant|\mu|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}|\mu|(E_k)<\frac{1}{2^{n-1}}$$

因而有$|\mu|(E)=0$，另一方面，由于γ有限，故有

$$|\gamma|(E)=\lim_{n\to\infty}|\gamma|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|\gamma|(E_n)\geqslant\varepsilon$$

这与假设条件$\gamma\ll\mu$矛盾。

现在我们给出用积分表示广义测度的一个重要定理，为此先来证明如下的引理。

引理1 设n是正整数，E是可测集，$f_k(k=1,2,\cdots,n)$是E上的可测函数，令

$$g_n=\max(f_1,f_2,\cdots,f_n)$$

则可将E分解为不相交的可测集$E_k(k=1,2,\cdots,n)$之和：

$$E=\sum_{k=1}^{n}E_k$$

使得在E_k上$g_n=f_k(k=1,2,\cdots,n)$。

证 用归纳法．设$n=2$，并令

$$E_1=\{\omega|\omega\in E,\ f_1(\omega)\geqslant f_2(\omega)\},\quad E_2=E-E_1,$$

则$E=E_1+E_2$具有所要求的性质，设分解对n是可能的，令

$$g_{n+1}=\max(f_1,f_2,\cdots,f_{n+1})=\max(g_n,f_{n+1})$$ 于是

$E=A_n+E_{n+1}$，此处在E_{n+1}上$g_{n+1}=f_{n+1}$，在A_n上$g_{n+1}=g_n$。由归纳法假设有 $A_n=\sum_{k=1}^{n}E_k$ 且$g_{n+1}(\omega)=g_n(\omega)=f_k(\omega),\omega\in E_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$，于是 $E=\sum_{k=1}^{n+1}E_k$是所要求的分解，即命题对$n+1$成立。

引理2 设μ和γ是$\mathscr{F}$上的两个有限测度，$\gamma\ll\mu$，且γ不恒为零，则存在正数ε和可测集A，使得$\mu(A)>0$，并使得A对广义测度$\gamma-\varepsilon\mu$为正集。

证 设$\Omega=A_n+B_n(n=1,2,\cdots)$是$\Omega$对广义测度 $\gamma-\frac{1}{n}\mu$ 的哈恩分解，并令

$$A_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad B_0=A_0^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$$

由于$B_0\subset B_n$，故有$\left(\gamma-\frac{1}{n}\mu\right)(B_0)\leqslant 0$，即

$$0\leqslant\gamma(B_0)\leqslant\frac{1}{n}\mu(B_0),\quad n=1,2,\cdots$$

从而有 $\gamma(B_0)=0$。由于γ不恒为零，故 $\gamma(A_0)>0$，根据绝对连续性的假设条件有$\mu(A_0)>0$。由此知至少对于n的一个值有$\mu(A_n)>0$；对于这个n值，令$A=A_n$和$\varepsilon=\frac{1}{n}$，即得引理的结论。

定理3 （拉东-尼古丁）设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是一个σ-有限测度空间，γ 是$\mathscr{F}$上的 σ-有限广义测度，如果$\gamma\ll\mu$，则存在Ω上的一个实值可测函数f，使得对每个$E\in\mathscr{F}$有

$$\gamma(E)=\int_E f\,d\mu \tag{2.1}$$

且在γ为测度的情况，可取f为非负可测函数。函数f在关于μ对等的意义下是唯一确定的：如果同时存在Ω上的实值可测函

数g，使得对每个$E\in\mathscr{F}$有

$$\gamma(E)=\int_E g\,d\mu$$

则 $f=g\quad a.e.[\mu]$。

(2.1) 式中的被积函数f通常称为广义测度γ关于测度μ的拉东-尼古丁导数，记为$\frac{d\gamma}{d\mu}$。

证　分以下几种情况逐步讨论：

(1) μ与γ都是$\mathscr{F}$上的有限测度。

设$\mathscr{K}$是满足如下条件的非负可测函数f的全体：对于每个$E\in\mathscr{F}$有

$$\int_E fd\,\mu\leqslant\gamma(E)$$

因为 $0\in\mathscr{K}$，故$\mathscr{K}$非空。令

$$\alpha=\sup\left\{\int_\Omega f\,du,f\in\mathscr{K}\right\}$$

则存在$\mathscr{K}$中的一个序列$\{f_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,du=\alpha$$

令

$$g_n=\mathrm{man}(f_1,f_2,\cdots,f_n)$$

于是由引理1，任意可测集E可分解为$E=\sum_{k=1}^{n}E_k$，使得在E_k上$g_n=f_k(k=1,2,\cdots,n)$。因为每个$f_k\in\mathscr{K}$，故

$$\int_E g_n d\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}f_k d\mu\leqslant\sum_{k=1}^{n}\gamma(E_k)=\gamma(E)\qquad(2.2)$$

因为$\{g_n\}$单调增加，故极限

$$f_0(\omega)=\lim_{n\to\infty}g_n(\omega)$$

存在，于是由勒维定理及(2.2)有

$$\int_E f_0 d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu \leqslant \gamma(E)$$

故$f_0 \in \mathscr{K}$，所以

$$\alpha \geqslant \int_\Omega f_0 d\mu \geqslant \int_\Omega g_n d\mu \geqslant \int_\Omega f_n d\mu$$

故$\alpha = \int_\Omega f_0 d\mu$。因为

$$\int_\Omega f_0 d\mu \leqslant \gamma(\Omega) < +\infty$$

故存在实值非负可测函数 f，使得$f \doteq f[\mu]$。

对于每个$E \in \mathscr{F}$，令

$$\gamma_0(E) = \gamma(E) - \int_E f d\mu$$

根据 f 的构造，γ_0是$\mathscr{F}$上的有限测度，易知$\gamma_0 \ll \mu$。下面我们要证明γ_0恒等于零。

假定γ_0不恒等于零，则根据引理 1，存在正数ε和可测集A，使得$\mu(A) > 0$，且使得A对于广义测度$\gamma_0 - \varepsilon\mu$ 为正集。于是对于每个$E \in \mathscr{F}$有

$$(\gamma_0 - \varepsilon\mu)(E \cap A) \geqslant 0$$

即

$$\varepsilon\mu(E \cap A) \leqslant \gamma_0(E \cap A) = \gamma(E \cap A) - \int_{E \cap A} f d\mu$$

令$g = f + \varepsilon\chi_A$，则对于每个$E \in \mathscr{F}$有

$$\int_E g d\mu = \int_E f d\mu + \varepsilon\mu(E \cap A) \leqslant \int_E f d\mu + \gamma(E \cap A) - \int_{E \cap A} f d\mu = \int_{E-A} f d\mu + \gamma(E \cap A) \leqslant \gamma(E)$$

因此$g \in \mathscr{K}$。但因

$$\int_\Omega g d\mu = \int_\Omega f d\mu + \varepsilon\mu(A) > \alpha$$

这与α的定义矛盾，于是必须有$\gamma_0=0$，即（2.1）成立。

（2）μ和γ都是$\mathscr{F}$上的σ-有限测度。

这时我们有

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \mu(A_n)<\infty$$

$$\Omega = \sum_{m=1}^{\infty} B_m, \quad \gamma(B_m)<\infty$$

由此有

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_n \cap B_m) \qquad (2.3)$$

于是我们就将Ω表示为μ和γ均有限的可列个互不相交的集之和，改变一下记号，(2.3)也可写为

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n$$

其中$\mu(\Omega_n)<\infty$，$\gamma(\Omega_n)<\infty$。令

$$\mathscr{F}_n = \{E \cap \Omega_n | E \in \mathscr{F}\}$$

则$\mathscr{F}_n$是Ω_n上的σ-代数。考虑限制在$\mathscr{F}_n$上的μ和γ，因为μ和γ有限，于是由（1）知，存在Ω_n上的非负实值可测函数f_n，使得当$E \in \mathscr{F}_n$时，有

$$\gamma(E) = \int_E f_n d\mu \qquad (2.4)$$

令

$$f(\omega) = f_n(\omega), \quad \omega \in \Omega_n \quad (n=1,2, \cdots)$$

则f是Ω上的非负实值可测函数，且对于任意的$E \in \mathscr{F}$，由（2.4）有

$$\gamma(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(E \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap \Omega_n} f_n \, d\mu = \int_E f d\mu$$

即（2.1）成立。

（3） μ 是$\mathscr{F}$上的σ-有限测度，γ是$\mathscr{F}$上的σ-有限广义测度。

此时若当分解给出 $\gamma=\gamma^+-\gamma^-$，于是由（2）有

$$\gamma^+(E)=\int_E f\,d\mu,\quad \gamma^-(E)=\int_E f_2\,d\mu,$$

此处f_1与f_2是非负实值可测函数，其中至少有一个是可积的，所以对一切$E\in\mathscr{F}$有

$$\gamma(E)=\gamma^+(E)-\gamma^-(E)=\int_E f\,d\mu$$

此处 $f=f_1-f_2$ 的积分是有定义的.于是我们就证明了(2.1)。

最后我们来证明（2.1)中的 f 在关于 μ 对等的意义下的唯一性。

设 g 是另一个实值可测函数，使得对一切$E\in\mathscr{F}$有

$$\gamma(E)=\int_E g\,d\mu \tag{2.5}$$

令

$$\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}A_n,\quad \mu(A_n)<\infty \tag{2.6}$$

$$E_n=\{\omega|f(\omega)>g(\omega),\ \omega\in A_n\},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

则 f 与 g 在 E_n上可积，且由（2.1）与（2.5）有

$$\int_{E_n}(f-g)d\mu=0$$

故 $\mu(E_n)=0$，即在 A_n 上 $f\leqslant g\ a.e.[\mu]$；类似地，在 A_n上有 $g\leqslant f\ a.e.[\mu]$，从而在A_n上有$f=g\ a.e.[\mu]$. 于是由（2.6)知，在Ω上$f=g\ \ a.e.[\mu]$.

拉东-尼古丁定理在概率论中有着重要的应用. 下面我们来举两个例子（推论1与2）.

推论1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一概率空间，$\mathscr{F}_1$是Ω中的σ-代数，且$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}$（即$\mathscr{F}_1$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$-代数），$A$是一随机事件（即是$\mathscr{F}$-可测集），则存在定义在$\Omega$上的、满足如下条件的实值函数$P(A|\mathscr{F}_1)(\omega)$：

（1）$P(A|\mathscr{F}_1)(\omega)$对于$\mathscr{F}_1$可测（因为$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}$，故此函数也对$\mathscr{F}$可测，即是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量）；

（2）对于任何$B\in\mathscr{F}_1$有

$$P(A\cap B)=\int_B P(A|\mathscr{F}_1)dP$$

且在关于P对等的意义下，上述$P(A|\mathscr{F}_1)(\omega)$是唯一确定的。

具有以上性质的函数$P(A|\mathscr{F}_1)(\omega)$称为（按杜勃（Doob）的定义）$A$关于$\mathscr{F}_1$的条件概率。

证 将$P(A\cap B)$看成是关于B的集函数，则它是$(\Omega,\mathscr{F}_1)$上的有限测度，由

$$P(A\cap B)\leqslant P(B)$$

知，$(\Omega,\mathscr{F}_1)$上的测度$P(A\cap B)$关于$(\Omega,\mathscr{F}_1)$上的测度$P(B)$绝对连续，故根据拉东-尼古丁定理知，满足条件（1）与（2）的函数$P(A|\mathscr{F}_1)(\omega)$存在，且在关于$P$对等的意义下是唯一的。

例 设$\{B_k\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中一列（有限个或无限个互不相交的可测集，且

$$\Omega=\sum_k B_k,\ P(B_k)>0$$

$\mathscr{F}_1$是B_1，B_2，…中若干个（零个，有限个或无限个）集之和集的全体。易知$\mathscr{F}_1$是$\mathscr{F}$的子σ-代数。对于$A\in\mathscr{F}$，令

$$P(A|\mathscr{F}_1)(\omega)=\frac{P(A\cap B_k)}{P(B_k)},\ \omega\in B_k,\ k=1,2,\cdots$$

易验证，上述$P(A|\mathscr{F}_1)(\omega)$就是$A$关于$\mathscr{F}_1$的条件概率。

这个例子显示了杜勃意义下的条件概率和通常的条件概率的关系.

推论 2 设$f(\omega)$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量. 且

$$\int_{\Omega}|f|dP<+\infty$$

(即f具有有限的数学期望). $\mathscr{F}_1$是$\mathscr{F}$的子σ-代数, 则存在定义在Ω上的满足如下条件的实值函数$E(f|\mathscr{F}_1)(\omega)$:

(1) $E(f|\mathscr{F}_1)(\omega)$对$\mathscr{F}_1$可测;

(2) 对于任意的$A\in\mathscr{F}_1$,

$$\int_A fdP=\int_A E(f|\mathscr{F}_1)dP$$

且在关于P对等的意义下, 上述$E(f|\mathscr{F}_1)$是唯一确定的.

具有以上性质的函数$E(f|\mathscr{F}_1)(\omega)$称为$f(\omega)$关于$\mathscr{F}_1$的条件数学期望.

证 和引理1类似, 由于$\int_A fdP(A\in\mathscr{F}_1)$是$(\Omega,\mathscr{F}_1)$上的一个有限测度, 且它关于$P$(作为限制在$\mathscr{F}_1$上的测度)绝对连续, 故根据拉东-尼古丁定理, 满足上述条件的$E(f|\mathscr{F}_1)$存在且在关于P对等的意义下是唯一的.

习 题 6·2

1. 设μ是一个广义测度, E是一个可测集, 则$|\mu|(E)=0$的充要条件是: 对于E的每个可测子集F, $\mu(F)=0$.

2. 设μ和γ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个测度, 则$\mu\ll\mu+\gamma$.

3. 给出一个例子说明广义测度绝对连续性定义中的条件$|\mu|(E)=0$不等价于$\mu(E)=0$.

4. 如果没有γ有限的条件, 定理2的结论是否成立?

5. 设μ和γ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度, 如果对于每个正数ε, 都存在相应的正数δ, 使得当$E\in\mathscr{F}$且$|\mu|(E)<\delta$时有$|\gamma|(E)<\varepsilon$, 则$\gamma\ll\mu$.

6. 证明拉东-尼古丁定理中μ为σ-有限的条件是不可少的.

7. 设 f 是非负可测函数， 且在具有正 μ-测度的集上为∞，令

$$\gamma(E)=\int_E f d\mu,\quad E\in\mathscr{F}$$

证明γ不具有 σ-有限的性质。

8. 设μ是 $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上的 σ-有限广义测度，f 是 $\mathscr{F}$-可测函数，如果 f 对$|\mu|$可积，则也对μ^+和μ^-可积。

9. 设μ是 $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上的广义测度，$\mu=\mu^+-\mu^-$是μ的若当分解。f 是$\mathscr{F}$-可测函数，如果 f 关于μ^+与μ^-都可积，则定义

$$\int_E f d\mu=\int_E f d\mu^+-\int_E f d\mu^-,\quad E\in\mathscr{F}$$

$\int_E f d\mu$称为 f 在E上关于广义测度μ的积分。证明

（1） $(\Omega,\ \mathscr{F})$ 上任何有界可测函数关于μ总是可积的；

（2）设f，g关于μ可积，α和β是两个任意实数，则 $\alpha f+\beta g$ 关于μ也是可积的，而且

$$\int_E(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_E f d\mu+\beta\int_E g d\mu$$

（3）如果 f 、g 关于μ_1和μ_2都几乎处处相等。则

$$\int_E f d\mu=\int_E g d\mu$$

（4）如果$\{E_n\}$是一列互不相交的可测集，则 f 在$\sum_{n=1}^{\infty}E_n$上关于μ可积的充要条件是

1°。f 在E_n $(n=1,2,\cdots)$ 上关于μ可积；

2°。$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|d\ (\mu_1-\mu_2)\ <\infty$。

当 f 在$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ 上可积时，有

$$\int_E f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f d\mu$$

（5）设 f 对μ可积，令

$$\gamma(E)=\int_E f d\mu,\quad E\in\mathscr{F}$$

则$\gamma\ll\mu$；

（6）当μ是σ-有限广义测度时，拉东-尼古丁定理仍成立。

§6·3 勒贝格分解定理与定分布函数的分解

我们先来引进和绝对连续性相对立的一种概念。

定义1 设μ和γ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个广义测度，如果存在两个不相交的可测集A与B，使得$\Omega=A+B$，且对任意的可测集E，有

$$|\mu|(A\cap E)=|\gamma|(B\cap E)=0$$

则称μ和γ是相互奇异的，也称γ关于μ（或μ关于γ），是奇异的，记为$\mu\perp\gamma$。

易知，如果μ与γ为测度，则$\mu\perp\gamma$的充分必要条件是：存在可测集A，使得

$$\mu(A)=\gamma(A')=0$$

例1 设Ω是全体正整数所组成的集，$\mathscr{F}$是Ω中全体子集所组成的类，μ是$\mathscr{F}$上恒等于0的测度，γ的定义如下：

$$\gamma(A)=A\text{中点的个数},\ A\in\mathscr{F}$$

这时$\mu(\{1\})=0$，而$\gamma(\{1\})=1$，故γ对μ不绝对连续，但如取$A=\Omega$，则

$$\mu(A)=\gamma(A')=\gamma(\phi)=0$$

故有$\mu\perp\gamma$。

定理1（勒贝格分解定理）设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是σ-有限测度空间，γ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的σ-有限测度，则必存在$(\Omega,,\mathscr{F})$上的σ-有限测度γ_0和γ_1，使得

$$\gamma=\gamma_S+\gamma_C$$

且$\gamma_S\perp\mu$，$\gamma_C\ll\mu$，γ的上述分解是唯一的。

证　令 $\lambda=\mu+\gamma$，显然λ是σ-有限测度，且$\mu\ll\lambda$，于是由拉东-尼古丁定理知，存在非负实值函数f，使得对每个 $E\in\mathscr{F}$，有

$$\mu(E)=\int_E f d\lambda$$

设

$$A=\{\omega|f(\omega)>0\},\ B=\{\omega|f(\omega)=0\},$$

则$A+B=\Omega$，且 $\mu(B)=\int_B f\,d\mu=0$

定义γ_s与γ_c如下：

$$\gamma_s(E)=\gamma(E\cap B),\gamma_c(E)=\gamma(E\cap A),\ E\in\mathscr{F}$$

则 $\gamma=\gamma_s+\gamma_c$，因为 $\gamma_s(A)=\mu(B)=0$，故有$\gamma_s\perp\mu$。如果$\mu(E)=0$，则有 $\int_E f d\lambda=0$，所以在E上 $f=0$ $a.e[\lambda]$。但f在$E\cap A$上为正，故 $\lambda(E\cap A)=0$。由λ的定义有$\gamma\ll\lambda$，故

$$\gamma_c(E)=\gamma(E\cap A)=0$$

于是就证明了$\gamma_c\ll\mu$。

为了证明分解的唯一性。我们设

$$\gamma=\gamma_s+\gamma_c=\widetilde{\gamma}_s+\widetilde{\gamma}_c$$

此处$\gamma_s\perp\mu$，$\widetilde{\gamma}_s\perp\mu$，$\gamma_c\ll\mu$，$\widetilde{\gamma}_c\ll\mu$。于是存在可测集$A$，$B$，$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$，使得

$$\Omega=A+B=\widetilde{A}+\widetilde{B}$$

且

$$\gamma_S(B)=\mu(A)=\widetilde{\gamma}_s(\widetilde{B})=\mu(\widetilde{A})=0$$

设$E\in\mathscr{F}$，则

$$E=(E\cap B\cap\widetilde{B})+(E\cap B\cap\widetilde{A})$$
$$+(E\cap A\cap\widetilde{B})+(E\cap A\cap\widetilde{A})$$

显然μ在这个和的最后三个集上为0，故由绝对连续性知，这三个集的γ_c与$\widetilde{\gamma}_c$测度亦为0。因为$\gamma_c-\widetilde{\gamma}_c=\gamma_s-\widetilde{\gamma}_s$，$\gamma_s(B)=\widetilde{\gamma}_s(B)=0$，故有

$$(\widetilde{\gamma}_c-\gamma_c)(E)=(\widetilde{\gamma}_c-\gamma_c)(E\cap B\cap \widetilde{B})$$
$$=(\gamma_s-\widetilde{\gamma}_s)(E\cap B\cap \widetilde{B})=0$$

从而有 $\gamma_c(E)=\widetilde{\gamma}_c(E)$，由此及$\gamma_s-\widetilde{\gamma}_s=\gamma_c-\widetilde{\gamma}_c$ 即得 $\gamma_s(E)=\widetilde{\gamma}_s(E)$，于是我们就证明了分解的唯一性。

下面我们将以上的定理应用于定分布函数的分解问题。

定义 2 设$F(x)$是定义在实数空间R上的实值函数，若对任给的$\varepsilon>0$，恒存在$\delta>0$，使得当R中任何有限个两两不相交的开区间(a_1, b_1)，(a_2, b_2)，…，(a_n, b_n)满足条件

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

时，不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon \tag{3,1}$$

恒成立，则称F为R上的绝对连续函数。

注：如果限制诸区间(a_k, b_k)在区间$[a, b]$中，则得到在$[a,b]$绝对连续的概念。

显然，绝对连续函数是在通常意义下的连续函数（取$n=1$）。但其逆不真，详见下例。

例 2 令

$$F(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

显然$F(x)$是一连续函数，下面我们要证明$F(x)$在区间$[0,1]$内并不绝对连续。

设n与m是任意正整数，令

$$a_k=\frac{1}{2(m+k)},\quad b_k=\frac{1}{2(m+k)-1},\quad k=1,2,\cdots,n$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\frac{1}{2m+1} \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(m+k)} \tag{3.3}$$

由于m可以任意大，故由（3.2)知$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$可以任意小，由于$n$可任意大，故由(3.3)知$\sum\limits_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|$可任意大，由此可知，$F(x)$不绝对连续。

在以下的讨论中符号μ恒等表示R中波莱尔集类$\mathscr{B}$上的勒贝格测度。为确定起见，以下当我们谈到$\mathscr{B}$上的有限测度γ的分布函数时，意指如下的定分布函数：

$$F(x)=\gamma((-\infty,x])$$

定理2 设γ是$(R,\mathscr{B})$上的有限测度，则$\gamma\ll\mu$的充分必要条件是γ的分布函数$F(x)$是R上的绝对连续函数。

证 先证充分性，设$F(x)$绝对连续，则对任意给定的正数ε，存在正数δ，使得当R中任何有限个两两不相交的开区间$(a_k,b_k)(k=1,2,\cdots,n)$满足条件$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$时，有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$$

设$E\in\mathscr{B}$且$\mu(E)=0$，由勒贝格测度性质易知，存在两两不相交的半闭区间$(a_k,b_k](k=1,2,\cdots)$，使得$E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]$，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta \tag{3.4}$$

由（3.4）知，对任意正整数n，恒有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$$

因而

$$\gamma(E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu((a_k,b_k])=\sum_{k=1}^{\infty}|F(b_k)-F(a_k)|\leqslant\varepsilon,$$

由于ε任意，故有$\gamma(E)=0$，这就证明了$\gamma\ll\mu$。

下证必要性．设 $\gamma\ll\mu$，则对于每一个正数ε，存在正数δ，使得对于满足条件 $\mu(E)<\delta$ 的任何波莱尔集 E，有$\gamma(E)<\varepsilon$．由此知，当R中任何有限个两两不相交的开区间$(a_k,b_k)(k=1,2,\cdots,n,)$满足条件

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k]\right)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

时，有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}\gamma((a_k,b_k])$$

$$=\gamma\left(\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k]\right)<\varepsilon$$

故 $F(x)$ 绝对连续。

定理 3 设 $F(x)$ 是绝对连续的定分布函数，则存在非负实值勒贝格可积函数f，使得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}fd\mu \tag{3.5}$$

其中f称为F的密度函数。

证 设μ_F是$F(x)$引出的勒贝格-斯提杰测度（有限），则$F(x)$是μ_F的分布函数：

$$\mu_F((-\infty,x])=F(x) \tag{3.6}$$

由定理2，$\mu_F\ll\mu$．于是由拉东-尼古丁定理知，存在非负实值可积函数f，使对每一$E\in\mathscr{F}$，有

$$\mu_F(E)=\int_E fd\mu$$

令$E=(-\infty,x]$得

$$\mu_F((-\infty,x])=\int_{(-\infty,x]}fd\mu\equiv\int_{-\infty}^{x}fd\mu \tag{3.7}$$

由（3.6）与（3.7）即得（3.5）．证毕。

定义 3　设 $F(x)$ 是定分布函数，如果存在非负勒贝格可积函数 f，使得

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f d\mu \tag{3.8}$$

则称 $F(x)$ 是连续型分布函数，f 称为 F 的密度。

定理 4　连续型分布函数一定绝对连续。

证　设 f 是 F 的密度，令

$$\gamma(E)=\int_E f\, d\mu$$

则 γ 是 $\mathscr{B}$ 上的测度，且 $\gamma\ll\mu$。由（3.8）知，$F(x)$ 是 γ 的分布函数，于是由定理 2 知，$F(x)$ 是绝对连续函数。

由以上两个定理可知，就定分布函数而言，绝对连续性的概念与连续型的概念是一致的。由于连续函数未必绝对连续，所以连续的分布函数未必是连续型分布函数。

定义 4　设 $F(x)$ 是定分布函数，如果存在 R 中的点列 $\{x_n\}$ 及定义在其上的实值函数 $p(x_n)$，使得

$$F(x)=\sum_{x_n\leqslant x} p(x_n)$$

则称 $F(x)$ 是离散型分布函数。

引理 1　任何定分布函数 F 都可以唯一地分解为

$$F=F_c+F_d$$

其中 F_d 为离散型分布函数，F_C 是连续（不一定是连续型）的定分布函数。

证　因为 F 是增函数，故它至多有可列个不连续点，设为 $x_n(n=1,2,\cdots)$。令

$$p(x_n)=F(x_n)-F(x_n-0)>0 \tag{3.9}$$

$$F_d(x)=\sum_{x_n\leqslant x} p(x_n),\quad x\in R$$

则 F_d 是离散型分布函数。令

$$F_c = F - F_d, \quad x \in R$$

显然$F = F_c + F_d$，且F_c是右连续函数．下面证明F_c是单增的左连续函数．对任意的$x' < x$，有

$$F_c(x) - F_c(x') = F(x) - F(x') - \sum_{x' < x_n \leq x} p(x_n)$$

$$= F(x-0) - F(x') - \sum_{x' \leq x_n < x} p(x_n) \qquad (3.10)$$

由此有

$$\lim_{x' \to x-0} [F_c(x) - F_c(x')] = F(x-0) - F(x-0) = 0$$

即F_c是左连续的．由（3.9）与(3.10)可知，对任意的$x' < x$有

$$F_c(x) - F_c(x') = F(x) - F(x') - \sum_{x' < x_n \leq x} p(x_n)$$

$$= [F(x) - F(x')] - \sum_{x' < x_n \leq x} [F(x_n) - F(x_n - 0)] \geq 0$$

所以F_c是增函数，从而证明了F_c是连续的分布函数．显然F_c还是定分布函数．

往证分解的唯一性．设F有两个分解式

$$F = F_c + F_d = \widetilde{F}_c + \widetilde{F}_d \qquad (3.11)$$

其中F_c与$\widetilde{F}_c$是连续的定分布函数，而F_d与$\widetilde{F}_d$是离散型分布函数．由（3.11）我们有

$$F_c - \widetilde{F}_c = \widetilde{F}_d - F_d$$

上式左边为连续函数，右边为两个离散型分布函数之差，由此容易证明这个差必须为零，即我们有$\widetilde{F}_d \equiv F_d$，从而有$\widetilde{F}_c = F_c$．

定义 4 如果有收敛于 0 的数列$h_1, h_2, \cdots (h_n \neq 0)$，使

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

存在（λ可为无穷），则称λ是函数$f(x)$在x_0处的一个导出数，记为

$$\lambda = Df(x_0)$$

易知，函数$f(x)$在x_0存在通常导数的充要条件是$f(x)$在

x_0 的一切导出数都相等；如果 $f(x)$ 是单增函数，则其一切导出数都是非负的。

定义 5 设 $F(x)$ 是连续的定分布函数，如果它的导数几乎处处（关于勒贝格测度 μ 而言）等于0，则称 $F(x)$为奇异型分布函数。

引理 2 设 γ 是 $\mathscr{B}$上的勒贝格–斯提杰测度，其分布函数为$F(x)$，如果$\gamma\perp\mu$，则 $F'(x)$ 几乎处处（关于 μ 而言）等于0。

证 因为$\gamma\perp\mu$，故存在$A\in\mathscr{B}$，使得

$$\gamma(A)=\mu(A')=0$$

令 $$D=\{x|F'(x)=0,x\in R\}$$

则 $$D'=\{x|\text{存在一个 } D(x)>0,\ x\in R\}$$

显然有，$D'=\bigcup_{m=1}^{\infty}D_m$，其中

$$D_m=\left\{x|\text{存在一个 } D(x)>\frac{1}{m},\ x\in R\right\}$$

如果 $\mu(D')>0$，则存在正整数m，使得

$$\mu(D_m)>0$$

因为

$$\mu(D_m)=\mu(A\cap D_m)+\mu(A'\cap D_m)$$

而 $\mu(A'\cap D_m)=0$，故有

$$\mu(A\cap D_m)>0 \tag{3.12}$$

因为$\gamma(A)=0$，易知对于任意的正数ε，存在开集G，使得

$$A\subset G,\ \gamma(G)<\varepsilon$$

设 $x\in A\cap D_m$，则必有 $h_n\to0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}>\frac{1}{m}$$

不妨设对于所有的n，不等式

$$\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}>\frac{1}{m}$$

成立，且 $[x, x+h_n]\subset G$（此处我们用$[\alpha, \beta]$，表示介于α和β之间的全体实数，不论$\alpha\leqslant\beta$或是$\alpha>\beta$）．记

$$d_n(x)=[x, x+h_n]$$

则

$$\gamma(d_n(x))=|F(x+h_n)-F(x)|>\frac{|h_n|}{m}=\frac{1}{m}\mu(d_n(x)) \tag{3.13}$$

易见集$A\cap D_m$在维他利（Vitali）意义下被闭区间集

$$\mathscr{H}=\{d_n(x)|x\in A\cap D_m, n=1,2,\cdots\}$$

所覆盖，于是根据维他利定理，在$\mathscr{H}$中可以选出有限或可列个两两不相交的闭区间 $\delta_k(k=1,2,\cdots)$，使得

$$\mu(A\cap D_m-\sum_k\delta_k)=0 \tag{3.14}$$

于是由（3．13）及（3．14）有

$$\mu(A\cap D_m)\leqslant\sum_k \mu(\delta_k)<\sum_k m\gamma(\delta_k)$$

$$=m\gamma\left(\sum_k\delta_k\right)\leqslant m\gamma(G)\leqslant m\varepsilon$$

由于ε可任意小，故有 $\mu(A\cap D_m)=0$，这与（3．12）矛盾．因此必须有$\mu(D')=0$，从而有$F'(x)=0 \quad a.e.[\mu]$．

推论 设γ是$\mathscr{B}$上的有限测度，其分布函数$F(x)$为连续函数，如果$\gamma\perp\mu$，则$F(x)$是奇异型分布函数．

证 这是因为$\mathscr{B}$上的有限测度的分布函数为定分布函数．

定理 5 任何定分布函数F都可唯一地分解为

$$F=F_d+F_{ac}+F_s$$

其中F_d为离散型分布函数，F_{ac}为连续型分布函数，F_s为奇异型分布函数．

证 由引理1，F可唯一地分解为

$$F=F_d+F_c \tag{3.15}$$

其中F_d为离散型分布函数，F_c为连续型分布函数。用γ_c表示由F_c引出的勒贝格-斯提杰测度，由勒贝格分解定理知，γ_c对勒贝格测度μ可唯一地分解为

$$\gamma_c=\gamma_{ac}+\gamma_s \tag{3.16}$$

其中$\gamma_{ac}\ll\mu$，$\gamma_s\perp\mu$，再由拉东-尼古丁定理知，存在非负实值勒贝格可积函数f，使得对每个$E\in\mathscr{B}$，有

$$\gamma_{ac}(E)=\int_E fd\mu$$

令

$$F_{ac}(x)=\gamma_{ac}((-\infty,x])，\ x\in R$$

$$F_s(x)=\gamma_s((-\infty,x])，\ x\in R$$

则F_{ac}与F_s分别为γ_{ac}与γ_s的分布函数（都是定分布函数），且

$$F_{ac}(x)=\int_{-\infty}^{x}f\,d\mu$$

是连续型分布函数；由（3.16）有

$$F_c=F_{ac}+F_s \tag{3.17}$$

由于F_c与F_{ac}为连续函数，故F_s亦为连续函数，由于F_s是γ_s的分布函数，而$\gamma_s\perp\mu$，故由引理2之推论知，F_s是奇异型分布函数。由（3.15）及（3.17）即得

$$F=F_d+F_{ac}+F_s$$

最后我们给出构造不恒等于常数的奇异型分布函数的一种方法。

设$0<\lambda_n<1$（$n=1,2,\cdots$），且

$$\prod_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\lambda>0 \tag{3.18}$$

按照比例$\lambda_1:(1-\lambda_1)$将区间分成两个闭区间：

$$\delta_0=[0,\lambda_1],\ \delta_1=[\lambda_1,1]$$

这两个区间都称为一阶区间。一般地，按比例$\lambda_{n+1}=(1-\lambda_{n+1})$将每个$n$阶区间$\delta_{x_1\cdots x_n}(x_i=0,1;\ i=1,2,\cdots,n)$都分成两个闭区间$\delta_{x_1\cdots x_n 0}$与$\delta_{x_1\cdots x_n 1}$就得到$n+1$阶区间，依此类推，显然我们有

$$\mu(\delta_{x_1\cdots x_n 0})=\lambda_{n+1}\mu(\delta_{x_1\cdots x_n 1}) \tag{3.19}$$

对于由0与1组成的任意无限序列$\{x_n\}$，令

$$\delta_{x_1x_2x_3\cdots}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\delta_{x_1\cdots x_n}$$

显然对任意的$x\in[0,1]$,存在一个由0与1组成的序列$\{x_n\}$，使得

$$x\in\delta_{x_1x_2x_3\cdots} \tag{3.20}$$

如果x是某个n阶区间的端点且$x\neq 0$与1，则存在两个序列对应于x，在这种情况，我们假定（3.20）中的下标的尾部恒为0。设$x\in[0,1]$且由（3.20）表示，令

$$f(x)=0.x_1x_2x_3\cdots\ (\text{二进制小数}) \tag{3.21}$$

则我们得到定义在[0.1]上的一个函数.$f(x)$的单调性和连续性是显然的，下面我们来证明$f'(x)$几乎处处为0（相对μ而言）.

任给$0<\varepsilon<1$，由（3.18),存在正整数n，使得

$$\prod_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k>1-\varepsilon$$

由（3.18）与（3.19）我们有

$$\mu(\delta_{x_1\cdots x_n 000\cdots})=\mu(\delta_{x_1\cdots x_n})\prod_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k$$

$$>\mu(\delta_{x_1\cdots x_n})(1-\varepsilon) \tag{3.22}$$

于是$\delta_{x_1\cdots x_n 000\cdots}$是一个非退化区间，由（3.21）知，在此区间上$f(x)$取常值$0.x_1x_2x_3\cdots$(二进制小数).由(3.22）我们有

$$\Sigma\mu(\delta_{x_1\cdots x_n 0 0 0\cdots}) > \sum\mu(\delta_{x_1\cdots x_n})(1-\varepsilon) = \varepsilon \qquad (3.23)$$

此处Σ表示对所有的 $x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 求和。因为 ε 可以任意小，故由（3.23）即可推出 f 在其上取常值的互不重叠的区间的长度之和为1，于是我们就证明了 $f'(x)$ 几乎处处为0。显然 $f(x)$ 在整个区间[0，1]上并不恒等于常数。

习　题　6·3

1. 设 μ 和 γ 是两个广义测度，并且 γ 对 μ 既是绝对连续的又是奇异的，则 $\gamma=0$。

2. 设 μ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度，γ_1 与 γ_2 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的广义测度，证明

（1）如果 $\gamma\perp\mu$，$\gamma_2\perp\mu$，则 $(\gamma_1+\gamma_2)\perp\mu$；

（2）如果 $\gamma\ll\mu$，$\gamma_2\perp\mu$，则 $\gamma_1\perp\gamma_2$。

3. 设 μ 是广义测度，则变差 μ^+ 与 μ^- 是相互奇异的。

4. 在同一可测空间中给出测度 μ 与 γ 的一个例子，使得关系 $\mu\ll\gamma$，$\gamma\ll\mu$，$\mu\perp\gamma$ 均不成立。

5. 证明任何离散型分布函数 $F(x)$ 引出的勒贝格-斯提杰测度 μF 对于勒贝格测度 μ 是奇异的。

6. 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间，使得 Ω 中的单点集 (ω) 是可测集，设 γ 与 μ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的 σ-有限测度，则

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$$

其中 $\gamma_1\ll\mu$，$\gamma_1+\gamma_2\perp\mu$，$\gamma_i\perp\gamma_j\ (i\neq j)$ 且对于每个 $\omega\in\Omega$，$\gamma_3(\{\omega\})=0$。

7. 设 μ 和 γ 分别为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度和有限广义测度，$A\in\mathscr{F}$。证明若 $\gamma\perp\mu$ $(\gamma\ll\mu)$，那么当 γ 和 μ 看成是 $(A, \mathscr{F}\cap A)$ 上的测度和有限广义测度时亦有 $\gamma\perp\mu$ $(\gamma\ll\mu)$。

8. 设 γ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的广义测度，试问在什么条件下有 $\gamma\perp\gamma$？

9. 证明任何奇异型分布函数 $F(x)$ 引出的勒贝格-斯提杰测度对勒贝格测度是奇异的。

10. 设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的导数，证明 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续。

11. 证明不恒等于0的奇异型分布函数不可能绝对连续。

参 考 书 目

〔1〕P.R.Halmos,Measure Theory,Van Nostrand,1950(中译本：测度论，科学出版社，1980）.

〔2〕И.П.Натансон. Теория Функций Вещественной Переменной，1950(中译本：实变函数论，人民教育出版社，1958）.

〔3〕朱成熹，测度论基础，科学出版社，1983.

〔4〕周性伟，抽象分析引论，科学出版社，1983.

〔5〕中山大学概率论教研室，测度与概率基础，广东科技出版社，1981.

〔6〕夏道行等，实变函数论与泛函分析（上册），人民教育出版社，1978.

〔7〕王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

〔8〕王梓坤，概率论基础及其应用，科学出版社，1976.

〔9〕杨宗磐，概率论入门，科学出版社，1981.

〔10〕严士健等，概率论基础，科学出版社，1982.

〔11〕Kai Lai Chung, A Course in Probability Theory, Academic Press, INC. 1974.

〔12〕R.B.Ash, Real Analysis and Probability, Academic Press, INC., 1972.

〔13〕G.De Barra, Measure Theory and Integration, Fllis Horwood Limited, 1981.

〔14〕Yuan Shih Chow and Henory Teicher, Probability

Theory, Springer-verlag, 1978.
[15] Edwin Hewitt and Karl Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-verlag, 1978.
[16] R.G.Laha and V.K.Rohatgi, Probability Theory, John Wiley Sons, Inc., 1976.